Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 3

(1) Usando o princípio de indução matemática, prove as seguintes proposições, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

(a) (soma dos primeiros n termos da progressão aritmética)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) (soma dos primeiros n termos da progressão geométrica) para $r \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = r\frac{1-r^n}{1-r}.$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

(2) Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(3) Sejam A e B os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{\frac{n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left]\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right[\cup \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{1 + (-1)^n \frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

(a) Determine o interior, a fronteira e o derivado de cada um dos conjuntos.

(b) Calcule o conjunto dos majorantes e minorantes de A e de B e indique, caso exista, o máximo e o mínimo de cada um deles.

(4) Dê exemplo (se possível) de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que seja

(a) finito não vazio e aberto

(b) fechado não limitado

(c) igual ao derivado

(d) igual à fronteira

(e) finito não majorado

(5) Considere o seguinte subconjuto de $\mathbb{R}$:

$$X = \{x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : x/x^{-1} \leq x^{-1}/x\}.$$

(a) Indique, caso existam, o supremo e o ínfimo de X.

(b) O conjunto X é um conjuto aberto? E fechado? Justifique.

(6) Prove que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R} \backslash A$ é um conjunto fechado.

(7) Determine o interior, a fronteira e o derivado dos seguintes conjuntos:
(a) $[0,2[\cup]3,5[\cup\{6,7\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 9\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x-3| \leq 5\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R}\colon x-1 \geq x\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R}\colon (x-1)/(x+3) > x/(x-2)\}$
(f) $[1,2] \cap \mathbb{Q}$.

(8) Mostre que em $\mathbb{R}$ um conjunto aberto não pode ter nem máximo nem mínimo. *Sugestão*: Note que o supremo é um ponto na fronteira.

(9) (a) Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ é simultaneamente fechado e aberto sse front $A = \emptyset$.
(b) (*) Mostre que front $A = \emptyset$ sse $A \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(10) Considere $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Prove que

$$int(A) \subseteq A \subseteq ad(A);$$