Universidade de Lisboa - ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 4

(1) Mostre que as seguintes sucessões são limitadas:

(a) $u_n = 1 + (-1)^n/n$

(b) $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

Sugestão: Na alínea b) comece por calcular os 3 ou 4 primeiros termos para tentar perceber entre que valores pode variar u_n e depois utilize o princípio da indução matemática para provar que todos os termos da sucessão estão realmente entre os valores que encontrou;

(2) Estude a monotonia das seguintes sucessões:

(a) $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

(b) $u_n = (-1)^n n^2$

(c) $u_n = n^{(-1)^n}$

(d) $u_n = a + (n-1)r$ com $a, r \in \mathbb{R}$ (progressão aritmética)

(e) $u_n = ar^{n-1}$ com $a, r \in \mathbb{R}$ (progressão geométrica)

(3) Explique a razão pela qual uma qualquer sucessão crescente é minorada e uma decrescente é majorada.

(4) Calcule os limites das sucessões:

(a) $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$

(b) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^4+3}$

(c) $u_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+2n-1}$

(d) Para $p, q \in \mathbb{N}$, $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$, $u_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{p} a_k n^k}{\sum\limits_{k=1}^{q} b_k n^k}$

(e) $u_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$

(f) $u_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}$

(g) $u_n = \sqrt{n}\dfrac{\sqrt{n}+3}{(\sqrt{n}+1)^2}$

(5) Determine o conjunto dos sublimites das sucessões:

(a) $u_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ par} \\ n, & n \text{ ímpar} \end{cases}$

(b) $u_{2k} = \frac{k}{2k+1}$ e $u_{2k-1} = -\frac{k}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$

(c) $u_n = 1/n + \cos(n\pi)$

(d) $u_n = \log|\cos[(n+1)\pi/3]| + \log[2 + (-1)^n]$

(e) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

(6) Dê um exemplo de uma sucessão cujo conjunto dos sublimites é

(a) $\{0, 1\}$

(b) $\mathbb{Z}$ (Sugestão: Compare com um dos casos da questão 5)

(7) Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular os limites das seguintes sucessões:

(a)
$$u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

(b)
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$$

(c)
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$$

(8) Considere a sucessão x_n da truncatura de π com n casas decimais:

$$x_1 = 3.1 \quad x_2 = 3.14 \quad x_3 = 3.141 \quad x_4 = 3.1415 \quad x_5 = 3.14159 \quad \ldots$$

(a) Diga se $X = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ tem inf, sup, min e max.

(b) Calcule $\lim x_n$.

(9) (*) Prove que existe uma sucessão cujo conjunto dos sublimites é:

(a) $[0, 1]$

(b) $\mathbb{R}$

(Sugestão: Pode dar-lhe jeito relembrar-se que: $\mathbb{Q}$ é numerável; $ad(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ e tentar usar uma proposição dada na aula que nos dá uma definição de ponto aderente sem usar o conceito de vizinhança)