PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E APLICAÇÕES

Exercícios

Licenciatura MAEG

ADER

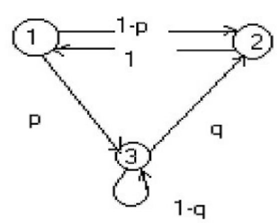
1 Noções gerais

1. Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ com $\Pr(\omega_i) = 1/4$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Considere-se o processo estocástico $\{X(t, \omega); t \geq 0\}$ tal que
$$X(t, \omega_i) = t \times i; i = 1, 2, 3, 4$$
   (a) Classifique o processo em causa.
   (b) Determine a função distribuição de X para $t = 1$.
   (c) Indique as trajectórias do processo.
   (d) Determine a função distribuição conjunta de $(X(1), X(2), X(3))$.

2. Considere uma sucessão infinita de provas de Bernoulli. Seja X_t o número de provas até obter um sucesso pela t-ésima vez, $t = 1, 2, ...$
   (a) Defina o exposto como um processo estocástico, indicando o espaço dos parâmetros e dos estados.
   (b) Determine para cada t a função de probabilidade de X_t .
   (c) Represente graficamente uma trajectória.
   (d) Determine a lei conjunta de (X_2, X_3, X_4).
   (e) Calcule $\Pr(X_4 = x | X_3 = x_3, X_2 = x_2)$ e $\Pr(X_4 = x | X_3 = x_3)$. Comente o resultado.
   (f) Determine a lei da v.a. "tempo ou número de provas entre dois sucessos de Bernoulli".
   (g) Determine a lei da v.a. "número de provas necessárias até à ocorrência de dois sucessos consecutivos de Bernoulli".

2 Cadeias de Markov

1. Considere uma cadeia de Markov homogénea definida pelo seguinte grafo:



   (a) Determine a matriz $\mathbf{P}$ das probabilidades de transição.
   (b) Em que condições esta cadeia é irredutível e aperiódica?
   (c) Determine a distribuição estacionária $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.
   (d) Calcule os valores para p e q tal que $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$.

2. Existem três marcas de detergentes, designadas A, B e C, de grande consumo. Um estudo de mercado revelou as seguintes percentagens de consumidores para cada uma das marcas, tendo em atenção comportamento idêntico na semana anterior:
   - Consumidores fiéis
     - Ao produto A: 80%;
     - Ao produto B: 75%;
     - Ao produto C: 95%;
   - Consumidores que consomem um produto na semana, tendo consumido outro na semana anterior

- Consomem A
    - tendo consumido antes B: 5%;
    - tendo consumido antes C: 2%;
- Consomem B
    - tendo consumido antes A: 15%;
    - tendo consumido antes C: 3%;
- Consomem C
    - tendo consumido antes A: 5%;
    - tendo consumido antes B: 20%;

(a) Justifique que se trata de uma cadeia de Markov homogénea e construa a respectiva matriz das probabilidades de transição.

(b) Calcule qual deverá ser a quota de mercado de cada uma das marcas no longo prazo.

3. Uma componente electrónica de um computador tem um tempo de vida expresso em unidades de tempo, representado pela variável aleatória ξ com função de probabilidade

k	1	2	3	4
$\Pr[\xi = k]$	0,1	0,3	0,2	0,4

Suponha que o computador inicia o seu funcionamento com uma componente completamente nova. Esta componente é substituída logo que falhe. Seja X_n a vida restante ou vida residual no fim do período n da componente que está a funcionar. Quando $X_n = 0$ a componente é logo substituída por uma nova no início do período seguinte.

(a) Justifique que $\{X_n\}$ é uma cadeia de Markov homogénea, defina cuidadosamente o espaço de estados e construa a respectiva matriz das probabilidades de transição $\mathbf{P}$.

(b) Mostre que a matriz $\mathbf{P}$ é regular e determine a probabilidade de que no longo prazo a componente em serviço no fim de um período tenha parado de funcionar, e portanto seja substituída.

4. Tome-se a cadeia de Markov com o espaço de estados $\mathrm{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Classifique os diferentes estados do espaço.

5. Considere a cadeia de Markov homogénea $\{X_n; n \geq 0\}$ com espaço de estados $\mathrm{S} = \{1, 2, 3\}$ e matriz de probabilidades de transição num passo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-q & q \end{bmatrix}, \quad 0 < p < 1 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1$$

(a) Classifique, justificando, cada um dos seus estados.

(b) Determine $\lim_{n \to \infty} \Pr[X_n = 3]$.

6. Uma urna contém 6 bolas, das quais 3 são encarnadas e 3 são verdes. São seleccionadas ao acaso da urna 2 bolas simultaneamente. Se uma for verde e a outra for encarnada, então são postas de lado e são colocadas duas bolas azuis na urna. Se não for o caso colocam-se de volta as bolas retiradas na urna. O processo repete-se até só haver bolas azuis na urna.

Seja X_n o número de bolas encarnadas na urna depois da tiragem n.

(a) Justifique que $\{X_n\}$ é uma cadeia de Markov homogénea, defina cuidadosamente o espaço de estados e construa a respectiva matriz das probabilidades de transição $\mathbf{P}$. Justifique cuidadosamente todos os procedimentos que efectuar.

(b) Classifique os estados da cadeia. Justifique os procedimentos que efectuar.

(c) Calcule a probabilidade de a determinada altura a urna só conter bolas azuis partindo de $X_0 = 3$. Justifique os cálculos que efectuar e interprete o resultado.

7. Considere que tem 5 bolas que estão distribuídas por duas urnas, A e B. Em cada período selecciona-se uma urna ao acaso e se não estiver vazia é retirada uma bola dessa urna e colocada na outra.

   Seja X_n o número de bolas na urna A no período n.

   (a) Construa a matriz das probabilidades de transição e classifique os diferentes estados do espaço de $\{X_n\}$. Justifique todos os procedimentos.

   (b) Justifique que se trata de uma cadeia de Markov regular. No longo prazo, qual a percentagem de tempo em que a urna B está vazia? Justifique.

8. Designe por p a probabilidade de que o tempo (chuvoso ou seco, considere um dos casos) num determinado dia do ano, qualquer e arbitrário, seja semelhante ao tempo do dia anterior. Seja p_1 a probabilidade de chover no 1^o dia do ano e represente por $\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ a cadeia de Markov representativa dos estados do tempo nos diferentes dias do ano.

   (a) Determine a matriz $\mathbf{P}$ das probabilidades de transição num passo.

   (b) Prove por indução que:

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(2p-1)^n}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (c) Determine a probabilidade p_n de chover no n-ésimo dia do ano e calcule o limite de p_n, $n \to \infty$.

   (d) Determine a distribuição estacionária de $\{X_n\}$.

   (e) Comente os resultados de c) e de d).

9. Considere uma cadeia de Markov nos estados 0 e 1, e matriz das probabilidades de transição:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{bmatrix},\ 0 < a, b < 1$$

   (a) Calcule a probabilidade do primeiro retorno ao estado 1 em n passos, $f_{11}^{(n)}$ $(n = 1, 2, ...)$ e verifique que o estado 1 é recorrente positivo.

   (b) Calcule a distribuição-limite (π_0, π_1). Discuta a sua existência. Relacione π_1 com a média do tempo de primeiro retorno ao estado 1. Justifique todos os procedimentos que efectuar.

10. Considere a cadeia de Markov $\{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ com espaço de estados $\mathrm{S} = \{0, 1\}$ e tal que,

$$0 < p_{00} < 1 \quad \text{e} \quad 0 < p_{11} < 1.$$

   (a) Prove que $\{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ é recorrente positiva.

   (b) Determine a respectiva distribuição estacionária.

11. Um determinado indivíduo modifica o seu estado de espírito durante o seu dia de trabalho. Tendo sido observado pelos seus colegas durante um longo período foram-lhe atribuídas as seguintes probabilidades de mudança do seu estado de espírito:

   - Se está de bom humor durante uma certa hora, a probabilidade de estar de mau humor durante a hora seguinte é de $0,2$;

- Se está de mau humor durante uma certa hora, a probabilidade de continuar de mau humor durante a hora seguinte é de $0,4$.

(a) Se o indivíduo durante a primeira hora de trabalho estava de mau humor, qual a probabilidade de estar de bom humor durante a terceira hora de trabalho?

(b) Admitindo que os estados de espírito são igualmente prováveis quando chega ao trabalho, determine a probabilidade de estar de bom humor durante a terceira hora de trabalho.

12. Considere a cadeia de Markov $\{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ com espaço de estados $\mathrm{S} = \{1, 2, 3\}$ e matriz de probabilidades de transição,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{bmatrix} \quad 0 < p < 1/2.$$

(a) Prove que $\{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ é recorrente positiva.

(b) Determine a respectiva distribuição estacionária.

13. Considere uma cadeia de Markov em tempo discreto com espaço de estados $\mathrm{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Classifique os diferentes estados do espaço. Justifique.

(b) Calcule $f_{34}(n)$, a probabilidade de a primeira visita ao estado 4 ter lugar no n-ésimo passo, partindo de 3, e calcule a probabilidade de absorção no estado 4, partindo de 3.

14. Observou-se de hora a hora uma máquina que produz parafusos, tendo-se constatado o seguinte:

- Ao longo da sua laboração a máquina pode avariar-se, passando a produzir parafusos defeituosos;
- Se estiver a produzir um parafuso defeituoso, a máquina é reparada e na hora seguinte o parafuso produzido é sempre não defeituoso;
- Se estiver a produzir um parafuso não defeituoso, a probabilidade de passar a produzir um parafuso defeituoso na hora seguinte é p.

Designe por $\{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ a cadeia de Markov representativa do estado de funcionamento da máquina ao longo das sucessivas horas observadas.

(a) Defina o espaço dos estados da cadeia e a respectiva matriz das probabilidades de transição.

(b) Determine a probabilidade de produzir parafusos não defeituosos muito tempo depois da máquina ter iniciado a sua laboração.

15. Considere uma cadeia de Markov definida pela matriz das probabilidades de transição:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a cadeia é irredutível e aperiódica.

(b) Discuta a existência de distribuição-limite e determine-a.

16. Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados S $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz das probabilidades de transição:

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad p, q > 0 \quad \text{e} \quad p + q = 1\,.$$

   (a) Classifique os diferentes estados do espaço. Justifique.

   (b) Encontre a distribuição-limite e discuta a sua existência.

17. Considere dois jogadores, dispondo cada um deles de 2 Euros e que apostam 1 Euro de cada vez até que um deles não disponha de dinheiro. A probabilidade de ganho em cada jogada é de p para o jogador A.

   (a) Calcule a matriz das probabilidades de transição e classifique, justificando, os diferentes estados do espaço.

   (b) Identifique os estados absorventes do processo e calcule as respectivas probabilidades (de absorção).

18. Considere uma cadeia de Markov $\{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ com espaço de estados S $= \{1, 2\}$, em que $P_{12} = P_{21} = 1$ e $Pr[X_0 = 1] = Pr[X_0 = 2] = 1/2$.

   (a) O que pode concluir quanto à convergência de $P_{ii}^{(n)}$ $(i = 1, 2)$ quando $n \to \infty$. Justifique.

   (b) Mostre que
   $$Pr[X_n = 1] = Pr[X_n = 2] = 1/2, \quad \forall\, n = 1, 2, \cdots$$
   i.e. a distribuição de X_n é estacionária. Comente e relacione justificadamente com a conclusão obtida na alínea anterior.

19. Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0; 1\}$ e matriz das probabilidades de transição

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1\,.$$

   (a) Calcule a função de probabilidade do tempo do 1^o retorno ao estado 0, $f_{00}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

   (b) Calcule a média do tempo do 1^o retorno $m_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{00}^{(n)}$ e verifique que $\pi_0 = \lim_{n\to\infty} P_{i0}^{(n)} = 1/m_0$.

20. Considere as seguintes matrizes de probabilidades de transição, **Q** e **R** nos estados 1 e 2:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}, \; \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

   Uma aranha, tentando caçar uma mosca, move-se entre as localizações **1** e **2** de acordo com uma cadeia de Markov com matriz de transição **Q**. A aranha parte da localização **1**.

   Por outro lado, a mosca que parte da localização **2** e não se dá conta da presença da aranha, move-se de acordo com uma cadeia de Markov com matriz de transição **R**.

   (a) Mostre que o *andamento da caçada* pode ser descrito por uma cadeia de Markov em 3 estados. Nesta cadeia um estado absorvente significa que a *caçada* acaba e os outros dois representam que a mosca e a aranha estão em localizações diferentes. Identifique convenientemente os estados da cadeia. Justifique todos os procedimentos.

   (b) Obtenha a matriz **P** das probabilidades de transição para esta cadeia. Justifique.

   (c) Calcule a probabilidade de que no longo prazo a aranha e a mosca estão nas suas localizações iniciais.

   (d) Calcule a duração média da caçada. Justifique.

3 Processos de contagem

1. O volume de vendas de um determinado produto constitui um processo de Poisson com volume médio de vendas de 4 unidades por dia.

   (a) Qual a probabilidade de que em dois dias se vendam exactamente 6 unidades?

   (b) Qual a probabilidade de que em dois dias se vendam mais do que 6 unidades?

   (c) Determine o volume médio de vendas semanal.

   (d) Qual a probabilidade de que um stock de 4 unidades dure menos do que um dia?

2. Numa loja os clientes chegam de acordo com uma lei de Poisson à média de 30 por hora. Qual a probabilidade de que o intervalo de tempo entre chegadas sucessivas seja:

   (a) Superior a 2 minutos?

   (b) Inferior a 4 minutos?

   (c) Entre 1 e 3 minutos?

3. Uma variável aleatória T diz-se *sem memória* se e só se:

   $$\Pr[T > x + y | T > x] = \Pr[T > y], \quad \forall\, x, y > 0.$$

   Demonstre:

   (a) Se T for uma v.a. contínua, T é sem memória se e só se T for distribuída exponencialmente.

   (b) Se T tomar apenas valores inteiros e positivos, T é sem memória para x e y não negativos sse existe uma constante p tal que:

   $$\Pr[T = k] = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

4. Considere um processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ com intensidade λ.

   (a) Mostre que, para $s < t$,

   $$\Pr[N(s) = k | N(t) = n] = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n.$$

   (b) Para $t, r \geq 0$, calcule $\mathrm{E}[N(t)N(t+r)]$.

5. A chegada de passageiros a uma paragem de autocarro segue um processo de Poisson de intensidade λ. Suponha que um autocarro partiu no instante $t = 0$ não tendo deixado nenhum passageiro em espera. Seja T o tempo de chegada do autocarro seguinte. Então o número de pessoas na paragem quando este chega é $N(T)$. Suponha que o tempo de chegada T é independente do processo de Poisson e que T tem distribuição Uniforme(1,2).

   Calcule a média $E[N(T)]$ e a variância $V[N(T)]$.

6. Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com intensidade λ e seja $P_k(t) = \Pr[X(t) = k]$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

   (a) Deduza as equações diferenciais

   $$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) \\ P_k'(t) &= -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)\,, k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

   (b) Encontre a partir das equações acima a função de probabilidade

   $$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

(c) Seja T uma variável aleatória, independente de $X(t)$, com função densidade de probabilidade $f(t) = \theta \exp\{-\theta t\}$, $t > 0$. Mostre que

$$\Pr[X(T) = k] = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^k, \; k = 0, 1, 2, \cdots$$

Nota: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ e $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ para α inteiro positivo.

7. Suponha que $\{N_1(t),\, t \geq 0\}$ e $\{N_2(t),\, t \geq 0\}$ são processos de Poisson independentes com intensidades λ_1 e λ_2, respectivamente.

   (a) Mostre que $\{N(t) = N_1(t) + N_2(t),\, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda_1 + \lambda_2$.

   (b) Mostre que a probabilidade de que o primeiro acontecimento do processo combinado ($\{N(t)\}$) venha de $\{N_1(t)\}$ é $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

8. Um processo $\{Z(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson Composto se para $t \geq 0$, $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ onde $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson de parâmetro λ e $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de v.a.'s iid e independentes de $N(t)$. Suponha ainda que a função geradora de momentos de X_i existe e designe-a por $m(s) = E[\exp\{sX\}]$. A f.g.m. de $N(t)$ é $M_{N(t)}(s) = \exp\{\lambda\,(\exp\{s\} - 1)\}$.

   Mostre, justificando todos os procedimentos, que a função geradora de momentos de $Z(t)$ é dada por

$$M_{Z(t)}(s) = \exp\{\lambda\,(m(s) - 1)\}\,.$$

9. A entrada de clientes num determinado *snack-bar* processa-se de acordo com um processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ à taxa de $\lambda = 10$ por hora. Desde o primeiro dia do ano que é proibido fumar neste bar. A experiência permitiu avaliar que, independentemente uns dos outros, cada cliente puxa de um cigarro para fumar com probabilidade $p = 0.3$ (e com probabilidade $q = 1 - p$ no caso contrário). O gerente do bar instalou um detector automático (muito eficiente mas caríssimo, contudo financiado pela UE!), que dispara um alarme sempre que um cigarro *aparece à vista*.

   Designe por $X(t)$ o número de clientes do *snack* que pretendiam fumar no período $(0, t]$. O processo $\{X(t), t \geq 0\}$ pode ser construído através de

$$X(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \;\; \mathrm{com\,Y_0 \equiv 0,\; eY_k} = \begin{cases} 1, \mathrm{c.p.\,p} \\ 0, \mathrm{c.p.\,q} \end{cases}, \; \forall \mathrm{k} \epsilon \mathbb{N}.$$

   A sequência $\{Y_k\}$ é independente de $\{X(t)\}$.

   (a) Diga e justifique que tipo de processo se trata e calcule a função geradora de momentos de $X(t)$.

   (b) Demonstre que a variável aleatória $X(t)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro λpt.

   (c) Calcule a probabilidade de três clientes terem pretendido fumar durante a segunda meia hora.

   (d) Admitindo que durante a primeira hora entraram 9 clientes no estabelecimento, determine a probabilidade de que três tenham pretendido fumar nesse período.

10. Sejam $\{X_i(t);\, t \geq 0\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, processos de Poisson independentes com intensidade λ, igual para cada um deles. Encontre a distribuição do tempo que decorre até haver pelo menos uma ocorrência em cada um deles.

11. Suponha que o número de passageiros que chegam a um aeroporto para apanhar um certo voo se processa de acordo com um processo de Poisson de intensidade λ. Admita que o n-ésimo passageiro que chega ao aeroporto para esse voo tem uma probabilidade p^n $(n = 1, 2, \cdots)$ de fazer um seguro de viagem.

    (a) Defina o processo $X(t)$, número de passageiros no instante t que apanham esse voo e que fazem seguro de viagem. Verifique que não se trata de um processo de Poisson composto.

(b) Calcule o número médio de passageiros que fizeram seguro de viagem.
Sugestão: Tenha em conta a seguinte propriedade da esperança matemática:

$$E[\phi(X,Y)] = E[E[\phi(X,Y)|X]].$$

12. Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com intensidade λ.

    (a) Para $t, s \geq 0$, mostre que $\mathrm{Cov}[N(t); N(t+s)] = \mathrm{E}[N(t)] = \mathrm{V}[N(t)]$.

    (b) $N(t)$ representa o número de automóveis ligeiros que entram no parque do Hipermercado Mantimentos e com destino a este. Cada automóvel pode levar no máximo 5 pessoas (incluindo o condutor), homens ou mulheres.
    Seja $X(t)$ o número de mulheres que entram no hipermercado por esta via.

       i. Explique em que condições $X(t)$ pode ser considerado um processo de Poisson composto concretizando a definição de $X(t)$.

       ii. Supondo que $X(t)$ é um processo de Poisson composto e que o número de mulheres por automóvel tem distribuição binomial (admitindo que lugar não ocupado por mulher é lugar ocupado por homem ou vazio) calcule $\mathrm{E}[X(t)]$ e $\mathrm{V}[X(t)]$.

13. Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com intensidade λ e seja W_k o tempo de espera até à $k-$ésima ocorrência no processo.

    (a) Explique a equivalência dos acontecimentos:

    $$\{W_1 > w_1, W_2 > w_2\} \Leftrightarrow \{X(w_1) = 0, X(w_2) - X(w_1) = 0 \,\mathrm{ou}\, 1\}$$

    e calcule a sua probabilidade. Justifique os procedimentos que efectuar.

    (b) Mostre que a função densidade conjunta de (W_1, W_2) é dada pela expressão

    $$f(w_1, w_2) = \lambda^2 e^{-\lambda w_2}, ; 0 < w_1 < w_2 < \infty$$

    e determine a função densidade condicional de W_1 dado $W_2 = w_2$. Comente cuidadosamente o resultado obtido.

14. Considere um processo de renovamento para o qual os tempos entre-ocorrências têm distribuição exponencial com parâmetro λ.

    (a) Calcule $F_2(t)$ a partir da fórmula da convolução

    $$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-y)dF(y)$$

    (b) Determine $\Pr[N(t) = 1]$.

15. Seja um processo de renovamento $\{N(t), t \geq 0\}$ e seja W_k o tempo de espera até à k-ésima ocorrência. Qual (ou quais) das seguintes afirmações é verdadeira? Justifique.

    (a) $N(t) < k$ sse $W_k > t$.

    (b) $N(t) \leq k$ sse $W_k \geq t$.

    (c) $N(t) > k$ sse $W_k < t$.

    (d) $N(t) \geq k$ sse $W_k \leq t$.

16. Uma operação stop da BT está montada em determinado ponto duma estrada nacional fiscalizando os carros que passam. A contagem dos veículos que passam desde o início da fiscalização comporta-se de acordo com um processo de renovamento. O tempo que decorre entre duas passagens sucessivas de veículos segue uma distribuição exponencial de média 2 minutos.

    Em determinado instante um dos guardas é substituído. O novo guarda questiona-se sobre o tempo adicional de espera pelo veículo seguinte. Calcule:

(a) A probabilidade de ter de esperar a mais pelo menos 2 minutos. Justifique.

(b) A probabilidade de o guarda substituído já ter esperado pelo menos dois minutos. Justifique.

(c) Calcule e interprete a média total de espera dos dois guardas a que se refere (a) e (b). Justifique.

4 Processos de Nascimento e Morte

1. Uma população de organismos evolui da forma seguinte. Cada organismo existe independentemente dos outros, e vive durante determinado tempo, aleatório, com distribuição exponencial de parâmetro θ, dividindo-se então em dois novos organismos. Por sua vez a sua existência é também independente dos outros organismos e têm um tempo de vida exponencialmente distribuído de parâmetro θ, e assim sucessivamente.

   Seja $X(t)$ o número de organismos existentes no instante t. Seja $X(0) = 1$ e $P_n(t) = \Pr[X(t) = n]$. Justifique que $X(t)$ é um processo de nascimento puro linear (processo de Yule), i.e. verifica

$$P'(t) = -\theta\left[n\,P_n(t) - (n-1)P_{n-1}(t)\right]\,, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

2. Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de nascimento puro tal que $N(0) = 1$ e taxa de natalidade decrescente:

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda & n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$$

   onde M é um inteiro positivo. Designe por $P_n(t) = \Pr[N(t) = n]$.

   (a) Prove que:

$$P'_n(t) = \begin{cases} -(M-1)\lambda P_n(t) & \text{se} \quad n = 1 \\ (M-n+1)\lambda P_{n-1}(t) - (M-n)\lambda P_n(t) & \text{se} \quad 1 < n \leq M \\ 0 & \text{se} \quad n > M \end{cases}$$

   (b) Prove por indução:

$$P_n(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} M-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1} e^{-(M-n)\lambda t} & \text{se} \quad 1 < n \leq M \\ 0 & \text{se} \quad n > M \end{cases}$$

3. Considere uma população de dimensão $N(t)$ no instante t e tal que $N(0) = 1$. Admita que qualquer dos membros desta população se divide em dois novos membros no intervalo $[t, t+h]$ com probabilidade $\lambda h + o(h)$ ou mantém-se inalterado neste intervalo com probabilidade $1 - \lambda h + o(h)$

   (a) Prove que $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de nascimento puro com taxa de natalidade $\lambda_n = n\lambda$, $\forall$ $n = 1, 2, \cdots$.

   (b) Designe por $p_k(t) = \Pr[N(t) = k]$, $k = 1, 2, \cdots$. Prove que:

$$p'_k(t) = (k-1)\lambda p_{k-1}(t) - k\lambda p_k(t), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

   (c) Tendo em conta a equação diferencial anterior, conclua por indução:

$$p_k(t) = e^{-k\lambda t}\left(e^{\lambda t} - 1\right)^{k-1} \quad k = 1, 2, \cdots.$$

   (d) Seja $P(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k(t)$ a função geradora das probabilidades $p_k(t)$. Prove que:

$$P(z,t) = \frac{ze^{-\lambda t}}{1 - z + ze^{-\lambda t}}.$$

(e) Calcule $E[N(t)]$.

4. Seja $\{N(t); t \geq 0\}$ um Processo de Nascimento Puro com $N(0) = I$ e taxa de natalidade $\lambda_n = n\lambda$, sendo I um inteiro positivo. Designe por $P_n(t) = Pr[X(t) = n]$.

   (a) Prove que

   $$\begin{aligned} P_I'(t) &= -I\lambda P_I(t) \\ P_n'(t) &= -n\lambda P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t)\,, \quad n = I+1, I+2, \cdots \end{aligned}$$

   (b) Prove que $P_k(t) = \left(\begin{array}{c} k-1 \\ I-1 \end{array} \right) e^{-I\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k-I}, \quad k \geq I$

5. Seja $\{X(t)\, t \geq 0\}$ um processo de Yule que é observado num determinado instante U, aleatório com distribuição Uniforme(0;1). Mostre que

   $$\Pr[X(U) = k] = \frac{p^k}{\beta k}$$

   para $k = 1, 2, \cdots$, com $p = 1 - e^{-\beta}$ e $X(0) = 1$.

6. Seja $\{X(t)\}$ um processo de morte puro linear com $X(0) = N$ e taxas de mortalidade $\mu_i = \theta i$, $i = 1, 2, ..., N$, e $\theta > 0$. Seja T uma variável aleatória, independente de $X(t)$, com distribuição exponencial de média $1/\theta$.

   (a) Mostre que $\Pr[X(T) = 0] = 1/(N+1)$, justificando cuidadosamente todos os procedimentos que efectuar. Interprete o resultado.

   (b) Mostre que a área média sob a trajectória de $X(t)$ é igual a N/θ. Justifique todos os procedimentos que efectuar.

7. Considere um processo de morte puro linear (com taxa de mortalidade $\mu_k = k\alpha$) e $X(0) = N$. Seja T o tempo de extinção da população. Mostre justificadamente que

   $$E[T] = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + \frac{1}{1}\right).$$

8. Seja $\{X(t); t \geq 0\}$ um processo de nascimento e morte tal que:

   $$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda q^n \quad 0 < q < 1,\ \lambda > 0 \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ \mu_n &= \mu \qquad \mu > 0 \qquad n = 1, 2, \cdots \\ \mu_0 &= 0 \end{aligned}$$

   Designe por $P_n(t) = Pr[X(t) = n]$.

   (a) Prove que

   $$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_n'(t) &= \lambda q^{n-1} P_{n-1}(t) - (\lambda q^n + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

   (b) Sendo $p_n = \lim P_n(t)$, $t \to \infty$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ a probabilidade de um estado estável, prove que

   $$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n q^{n(n-1)/2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

9. Seja $\{X(t); t \geq 0\}$ um processo de nascimento e morte tal que:

   $$\begin{aligned} \lambda_n &= n\lambda + a \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ \mu_n &= n\mu \qquad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

   com $\lambda > 0$, $\mu > 0$ e $a > 0$. Designe por $P_n(t) = Pr[X(t) = n]$.

(a) Prove que

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -aP_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_n'(t) &= [a + \lambda(n-1)]\, P_{n-1}(t) - [(\lambda+\mu)n + a]\, P_n(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

(b) Sendo $p_n = \lim P_n(t)$, $t \to \infty$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ calcule p_2 em função de p_0. Dê a interpretação da probabilidade calculada.

10. Seja $\{N(t)\}$ o número de linhas ocupadas numa central da Telekome (com um grande número de linhas), descrito segundo um processo de imigração e morte, com taxa de imigração λ e taxa de mortalidade $\mu_k = k\,\mu$. Isto é, as chamadas afluem à central com uma intensidade constante λ, independente do número de linhas ocupadas, e as conversações acabam a uma taxa μ por linha ocupada.

    (a) Mostre que as equações diferenciais (progressivas) são as seguintes

    $$P_i{}'(t) = -(\lambda + i\,\mu)P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t)\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

    (b) Sabendo que

    $$P_i(t) = \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}\left(1 - e^{-\mu\, t}\right)^i \exp\left\{-\lambda\left(1 - e^{-\mu\, t}\right)/\mu\right\}\,, \quad i = 0, 1, \cdots$$

    calcule a probabilidade de, no longo prazo ($t \to \infty$), as linhas estarem todas desocupadas e determine a distribuição estacionária.

11. Seja ξ_n, $n = 0, 1, \cdots$, uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{0, 1\}$ e matriz $\mathbf{P}$

    $$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

    Considere ainda um processo de Poisson com parâmetro λ, $\{N(t); t \geq 0\}$. Mostre que $\{X(t) = \xi_{N(t)}, t \geq 0\}$ é um processo de nascimento e morte (dois estados) e determine os parâmetros λ_0 e μ_1 em termos de α e λ.

12. Num auto-banco os clientes chegam de acordo com uma lei de Poisson com valor médio 10 clientes por hora. O tempo de serviço por cliente é exponencial de valor médio 5 minutos. O espaço situado em frente do *guichet*, incluindo o carro que está a ser servido, comporta no máximo 3 viaturas; as restantes terão de esperar fora deste espaço.

    (a) Qual a probabilidade de que um cliente que acabe de chegar possa estacionar em frente do *guichet*?

    (b) Qual a probabilidade de que um cliente que acabe de chegar tenha de esperar fora desse espaço?

    (c) Quanto tempo terá de esperar em média um cliente acabado de chegar antes de começar o seu serviço?

    (d) Quantos lugares para viaturas deverão existir em frente do *guichet* de tal forma que os clientes possam aí esperar pelo menos 20% do seu tempo?

13. Suponha uma estação de lavagem automática de automóveis. Os automóveis chegam para lavagem segundo um processo de Poisson com média 5 por hora. O tempo de lavagem e secagem de cada carro segue uma distribuição exponencial com média de 10 minutos por carro. A estação de serviço não comporta mais do que o tratamento de um carro de cada vez.

    (a) Calcule qual deve ser o número médio de lugares disponíveis (junto à estação de serviço) para parqueamento dos automóveis que tenham que ficar à espera de atendimento.

    (b) Calcule quantos desses lugares se devem disponibilizar para que um cliente que chegue possa parquear o seu carro em pelo menos em 80% das vezes.
    Nota: $\sum_{i=0}^{n} r^i = (1 - r^{n+1})/(1-r)$

(c) Qual a probabilidade de que um cliente que chegue possa ser logo atendido. Calcule o tempo médio gasto por cada cliente na estação de serviço. Conclua sobre medidas a tomar pelo gestor do sistema.

14. A cidade A é servida por duas empresas de Táxis. Cada uma delas tem ao serviço dois carros repartindo o mercado mais ou menos em partes iguais, recebendo cada uma delas chamadas para serviço a uma taxa de 10 por hora. O tempo médio da *corrida* é de $11,5$ minutos. A chegada de chamadas segue uma distribuição de Poisson e o tempo da *corrida* é exponencial.

    As duas companhias foram recentemente adquiridas por um empresário local que, visando uma economia de custos pensou logo em fundir as duas companhias numa só operadora, podendo eventualmente trazer vantagens para os consumidores.

    Tendo em conta o tempo médio de espera do cliente até à disponibilização de um carro para serviço, analize as duas seguintes situações:

    (a) Continuação de duas filas independentes, como se duas companhias diferentes e independentes se tratasse;

    (b) Fusão das duas companhias num só centro operador,

    e

    (c) Conclua sobre as vantagens ou desvantagens da fusão, comentando sobre eventuais medidas posteriores a tomar pelo empresário. Calcule ainda na situação de b) a percentagem de tempo em que todos os carros estão "sob chamada".

15. Numa estação de serviço com um posto de atendimento os clientes chegam de acordo com uma lei de Poisson de intensidade $1/16$. O tempo de serviço por cliente é uma v.a. exponencial de valor médio 15 minutos e o custo de serviço de cada cliente é de C.

    (a) Determine o número médio de clientes no sistema.

    (b) Se o número médio de clientes servidos passar para $1/10$, qual o aumento médio do custo de serviço por minuto?

    (c) Que valor deverá tomar o número médio de clientes servido por minuto de forma a que:

        i. O número médio de clientes no sistema seja inferior a 10?

        ii. O aumento médio do custo de serviço por minuto não ultrapasse o valor c?

16. Determine o tempo médio de espera W num sistema $M/M/2$ quando $\lambda = 2$ e $\mu = 1,2$ e compare com o mesmo tempo médio W mas num sistema $M/M/1$ com $\lambda = 1$ e $\mu = 1,2$.

    Explique a diferença entre os diferentes W's se a taxa de chegada por servidor é a mesma em ambos os casos?

17. A um serviço, com um único posto, de um terminal de aeroporto acorrem dois tipos de passageiros: provenientes de linhas internas e de linhas internacionais. Admita que as chegadas destes dois grupos se processa de acordo com uma lei de Poisson de parâmetros 10 e 5 por hora respectivamente. Suponha que o tempo de serviço é exponencial com valor médio 3 minutos.

    (a) Determine para que valor deverá passar o tempo médio de serviço de forma a que o tempo médio de espera no sistema seja o mesmo no caso de existirem dois postos de serviço com características semelhantes às do posto inicial.

    (b) Determine a probabilidade de que estes dois postos de serviço se encontrem ocupados.

18. Considere um sistema de espera $M/M/2$. Apresentando a solução em termos da intensidade de tráfego ρ, determine a distribuição estacionária do número de clientes no sistema em determinado instante e calcule o comprimento médio do sistema L_s.

19. Clientes chegam a uma bilheteira de cinema (várias salas) com uma atendedora de acordo com um processo de Poisson com um tempo médio de espera entre-chegadas de 1,25 minutos. Os tempos de serviço seguem uma distribuição exponencial com média de 1 minuto.

    Conclua, justificando sobre a veracidade ou falsidade das seguintes afirmações:

    (a) O servidor ficará sempre ocupado depois da chegada do primeiro freguês.

    (b) A fila crescerá indefinidamente.

    (c) Se um segundo *guichet* for aberto entretanto com a mesma distribuição do tempo de serviço do anterior, o sistema poderá tornar-se estacionário.

    (d) A probabilidade de que um cliente que chegue tenha de esperar é proporcional à intensidade de tráfego ρ.

    (e) Um cliente que foi atendido, verificou passados 2 minutos que o bilhete que lhe foi vendido era para a sala errada, tendo-se dirigido imediata e directamente ao atendedor para a reclamação. Os pressupostos do modelo não se alteram.

20. Considere um sistema de espera $M/M/2$. Mostre que a distribuição estacionária do número de clientes no sistema em determinado instante é dado por

    $$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho};\ \pi_k = 2\rho^k\pi_0,\ para\ k = 1, 2, 3, ...$$

    em que ρ é a intensidade de tráfego.

    Calcule ainda o comprimento médio do sistema em função de ρ.

21. Considere que necessita de modelar um sistema de espera com um servidor e capacidade finita, limitada a 3 clientes (dois na fila e um em serviço). Seja $X(t)$ o número de clientes no sistema no instante t. Os clientes acorrem ao sistema de acordo com um processo de Poisson com intensidade λ e os tempos de serviço, independentes, têm distribuição exponencial com média $1/\mu$. Se chega um cliente e existem três clientes no sistema então o cliente desiste e perde-se.

    (a) No longo prazo, qual a fracção de tempo em que o sistema está desocupado? Justifique.

    (b) No longo prazo, qual a percentagem de clientes que se perdem? Justifique.

5 Martingalas

1. Seja $U_1, U_2 ...$ uma sequência de variáveis aleatórias iid com distribuição Uniforme(0,1). Seja $X_0 = 1$, $X_n = 2^n \Pi_{i=1}^n U_n$, $n = 1, 2, ...$ Mostre que $\{X_n\}$ é uma martingala.

2. Sejam $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n = 1, 2, ...$ em que $\{\xi_i\}$ é uma sequência de v.a.'s iid com distribuição exponencial de média 1. Mostre que

    $$X_n = 2^n \exp\{-S_n\},\ n \geq 0$$

    define uma martingala.

3. Sejam $\xi_1, \xi_2 ...$ v.a.'s de Bernoulli de parâmetro p $(0 < p < 1)$ e independentes. Seja

    $$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_n &= p^{-n}\Pi_{i=1}^n \xi_i,\ n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

    (a) Mostre que $\{X_n\}$ é uma martingala.

    (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} X_n$.

4. Considere um processo estocástico $\{X_n\}$ que evolui de acordo com as seguintes regras:

   - Se $X_n = 0$ então $X_{n+1} = 0$
   - Se $X_n > 0$ então

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{com probabilidade} \frac{1}{2} \\ X_n - 1 & \text{com probabilidade} \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Mostre que $\{X_n\}$ é uma martingala não-negativa.

5. Considere a Martingala $\{X_n\}$, com $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ e

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{com prob. p} \\ -1; & \text{com prob. } 1 - \text{p} \end{cases}$$

   Considere a v.a. T que representa o n^o de jogadas até o jogador obter um ganho de $i : \sum_{j=1}^{T} Y_j = i$.

   (a) Mostre que T é tempo de Markov.

   (b) Calcule $E[T]$.

   (c) Considere $p \neq 1/2$.

      i. Neste caso, justifique que $\{X_n\}$ não é Martingala.

      ii. Mostre que $Z_n = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_Y)$ já é Martingala.

      iii. T é um tempo de paragem relativo a $\{Z_n\}$.

6 Movimento Browniano

1. Considere um movimento Browniano standard $\{B(t), t \geq 0\}$ nos instantes $0 < u < u + v < u + v + w$, em que $u, v, w > 0$. Calcule $\mathrm{E}\left[B(u)B(u + v)B(u + v + w)\right]$.

2. Seja $\{B(t), t \geq 0\}$ com $B(0) \equiv 3$, um movimento Browniano com parâmetro de variância σ^2. Determine a função de covariância $\mathrm{Cov}[B(t), B(s)]$, $t, s \geq 0$.

3. Considere um movimento Browniano standard $\{B(t), t \geq 0\}$. Determine as funções de covariância para os processos estocásticos:

   (a) $U(t) = e^{-t}B(e^{2t})$, $t \geq 0$.

   (b) $V(t) = (1 - t)\, B\left(t/(1 - t)\right)$ para $0 < t < 1$.

   (c) $W(t) = tB(1/t)$ com $W(0) = 0$.

4. Seja $\varepsilon > 0$, mostre que

$$\Pr\left\{\frac{|B(t)|}{t} > \varepsilon\right\} = 2\left[1 - \Phi(\epsilon\sqrt{t})\right]$$

   Estude o comportamento para quando $t \to \infty$ e $t \to 0$.

5. Considere um movimento Browniano Standard $\{B(t), t \geq 0\}$. Para um t fixo e $M(t) = \max_{0 \leq u \leq t} B(u)$,

   (a) Mostre que $M(t)$ e $|B(t)|$ têm a mesma distribuição com fdp

$$f_{M(t)}(x) = \frac{2}{\sqrt{t}}\phi(x/\sqrt{t}),\ x > 0$$

   (b) Mostre que $E[M(t)] = \sqrt{2t/\pi}$.

6. Sejam $B_1(t)$ e $B_2(t)$ movimentos Brownianos independentes e seja $R(t) = \sqrt{B_1(u)^2 + B_2(u)^2}$, $t \geq 0$. Calcule $E\left[R(t)\right]$.

7. As flutuações de preço das acções de determinada companhia são explicadas por um movimento Browniano $\{A(t), t \geq 0\}$. Suponha que a companhia vai à falência se o preço de mercado das acções baixarem ao nível zero. Se o valor inicial das acções for $A(0) = 5$ u.m., qual a probabilidade de que a companhia vá à falência no instante $t = 25$? Qual a probabilidade de que as acções estejam acima de 10 no mercado no instante $t = 25$.

8. Considere um movimento Browniano com desvio, com parâmetros $\mu = 0,1$ e $\sigma = 2$. Calcule a probabilidade do processo sair fora do intervalo $(a, b]$ no ponto b, partindo de $X(0) = 0$, para $b = 1, 10, 100$ e $a = -b$.

9. A flutuação de preço de determinado tipo de acção pode ser descrita por um movimento Browniano geométrico com parâmetro de desvio $\alpha = 0$. Suponha que compra destas acções, quais são as hipóteses de ver o seu capital investido a duplicar?

7 Soluções

Capítulo **2**.

1b. $0 < p, q < 1 \vee 0 < p < 1, q = 1 \vee p = 1, 0 < q < 1$. **1c**. $(q/(p+2q), q/(p+2q), p/(p+2q))$

2b. A: 11,2%; B: 15,52%; C: 73,28%

5b. $(2-q)^{-1}$

6c. 1

7b. 50/3%

8c. $\lim_{n\to\infty} p_n = 1/2$; **8d**. $(1/2, 1/2)$

13b. $(1/2)4^{-(n-1)}$, $2/3$

15b. $(0,3; 0,4; 0,3)$

16b. $\left(\left(1+p+p^2+p^3+p^4\right)^{-1}, p\pi_0, p^2\pi_0, p^3\pi_0, p^4\pi_0\right)$

17b. $q^2/(1-2pq)$; $p^2/(1-2pq)$

18a. ñ converge, ñ tem distr.-limite.

19b. $(\alpha+\beta)/\beta$

20b. $\{0,28; 0,18; 0,54; 0,18; 0,28; 0,54; 0; 0; 1\}$; **20c**; 0 **20d**; 1,8519

Capítulo **3**.

1a. 0,1221; **1b**. 0,6867; **1c**. 20; **1d**. 0,56653

4b. $\lambda t\,(1+\lambda(t+r))$

5. $3\lambda/2$; $\frac{1}{2}\lambda\left(3+\frac{\lambda}{6}\right)$

10. $F_T(t) = \left(1-e^{-\lambda t}\right)^n$

11b. $p\,(1-p)^{-1}\left(1-e^{\lambda t(p-1)}\right)$

12(b)ii. $5p\lambda t$; $5p\lambda t + 20p^2\lambda t$.

14b. $\lambda t \exp\{-\lambda t\}$

15a. V; **15b**. F; **15c**. F; **15d** V

16a. e^{-1}; **16b**. e^{-1} se $t > 2$, $e^{-t/2}$se $t \le 2$; **16c**. $2 + \left(1-e^{-t/2}\right)$

Capítulo **4**.

10b. $exp\{-\lambda/\mu\}$

11. λ, $\lambda(1-\alpha)$

12a. $\simeq 0,42$; **12b**. $\simeq 0,58$; **12c**. 25m; **12d**. $n \ge 1$

13a. 25/6; **13b**. $\simeq 8$; **13c**. 1/6; 1h

14a. $\simeq 2,117$; **14b**. $\simeq 1,047$; **14c**. 91%

15a. 15; **15b**. $C/30$; **15c**. $\mu > 11/160$; $\mu \le 16/15$

16. 2,(727)

17a. $(1+\sqrt{10})/24$

18. $L_s = 2\rho/(1-\rho^2)$

19a. Falso; **19b**. Falso; **19c**. Verdade; **19d**. Verdade; **19e**.$\sim$

20. $L_s = 2\rho/\left(1 - 2\rho^2\right)$

21a. $\left(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3\right)^{-1}$ 21a. $\rho^3/\left(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3\right)$.

Capítulo **5**.

3b. 0 c.p. 1