

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 5

- (1) Sejam x_n e y_n sucessões convergentes com $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$. Prove que:
- (a) Se $a < b$, então a partir de alguma ordem verifica-se $x_n < y_n$.
 - (b) Se $x_n < y_n$ verifica-se para infinitos valores de n , então $a \leq b$.
- (2) Calcule, ou prove que não existe, o limite das seguintes sucessões:
- (a) $n!n^{-1000}$
 - (b) $\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n^2}$
 - (c) $\sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n+3}}$
 - (d) $\sqrt[n]{2^n + 1}$
 - (e) $\sqrt[n]{n!}$
 - (f) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$
 - (g) $\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$
 - (h) $n^{1/n}$
 - (i) $n^{-1/n}$
 - (j) n^{-n}
- (3) Diga se são monótonas e limitadas as seguintes funções, indicando (se possível) os seus máximos e mínimos nos respectivos domínios.
- (a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x|}{x}$
 - (b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{1+x^4}$
 - (c) $h: [-a, a[\rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^n$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}^+$
 - (d) $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \phi(x) = \sqrt{x^2} - 1$
 - (e) $\theta:] - \pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}, \theta(x) = \tan x$.
- (4) Diga quais são os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(5) Sejam as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $x = 1$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \arcsin(x), & -1 < x < 1 \\ K \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \geq 1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \frac{x + |x|}{2} D(x) \quad \text{onde} \quad D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Calcule K e estude a continuidade de f e g em \mathbb{R} .
 (b) Determine (se possível) $f(\mathbb{R})$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, $g(\mathbb{R})$, $\sup g$, $\inf g$, $\max g$, $\min g$.
 (c) Calcule (se possível): $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(6) Determine os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2, & x \notin \mathbb{Z} \\ |1 + x| + |1 - x|, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$