## Lista 5

1.a) Por hipotese temos que $\lim x_n = a$ e que $\lim y_n = b$. Por definição de limite podemos afirmar que

$\forall \delta > 0\, \exists p : n > p \Rightarrow a - \delta < x_n < a + \delta$ e que $\forall \delta > 0\, \exists p : n > p \Rightarrow b - \delta < y_n < b + \delta$;

Como $a < b$ temos, em particular, $a \neq b$ e portanto podemos aformar que $d(a, b) > 0$;

Assim, escolhendo $\delta < \frac{d(a,b)}{2}$ sabemos que:

$\exists p_1 : n > p_1 \Rightarrow a - \delta < x_n < a + \delta \quad \text{e} \quad \exists p_2 : n > p_2 \Rightarrow b - \delta < y_n < b + \delta$;

Logo, para $n > max\{p_1, p_2\}$, temos

$x_n < a + \delta < a + \frac{d(a,b)}{2} = b - \frac{d(a,b)}{2} < b - \delta < y_n$, $\left(\text{para visualizar pode ajudar desenhar na recta real}\right)$

o que termina a demonstração.

1.b) Por hipótese sabemos que $x_n < y_n$, para infinitos valores de $n$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $a > b$. Aplicando o resultado provado na alínea anterior (com os "papéis" de $a$ e $b$ trocados:isto é, $b < a$) chegamos facilmente a um absurdo.

6.b) Dado $a \in \mathbb{R}$, para que a função $f$ seja contínua no ponto $a$, é preciso que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$;

Seja $a \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{x^2}{2} + 2\right) = \frac{a^2}{2} + 2$;

Quanto ao valor de $f(a)$ temos que distinguir 2 casos:

- Se $a \notin \mathbb{Z}$ então $f(a) = \frac{a^2}{2} + 2$ e portanto, podemos concluir que $f$ é contínua em $a$, para todo $a \notin \mathbb{Z}$;
- Se $a \in \mathbb{Z}$ então $f(a) = |1 + a| + |1 - a|$ e logo para que $f$ seja contínua em $a \in \mathbb{Z}$ é preciso que $\frac{a^2}{2} + 2 = |1 + a| + |1 - a|$. Como

$$|1+a| = \begin{cases} 1+a & \text{se } 1+a \geq 0\,(a \geq -1) \\ -1-a & \text{se } 1+a < 0\,(a < -1) \end{cases} \text{ e } |1-a| = \begin{cases} 1-a & \text{se } 1-a \geq 0\,(a \leq 1) \\ -1+a & \text{se } 1-a < 0\,(a > 1) \end{cases} \text{ então}$$

$$|1+a| + |1-a| = \begin{cases} -2a & \text{se } a < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq a \leq 1 \\ 2a & \text{se } a > 1 \end{cases}.$$

Assim, temos 3 casos a considerar:

  - Se $a \in \mathbb{Z}$ e $a < -1$ então para que $f$ seja continua em $a$ temos que ter:
    $\frac{a^2}{2} + 2 = -2a$ isto é, $a = -2$;
  - Se $a \in \mathbb{Z}$ e $-1 \leq a \leq 1$ (isto é, $a \in \{-1, 0, 1\}$) então para que $f$ seja continua em $a$ temos que ter:
    $\frac{a^2}{2} + 2 = 2$ isto é, $a = 0$;
  - Se $a \in \mathbb{Z}$ e $a > 1$ então para que $f$ seja continua em $a$ temos que ter:
    $\frac{a^2}{2} + 2 = 2a$ isto é, $a = 2$;

Logo, os pontos de descontinuidade da função são os elementos do conjunto $\mathbb{Z}\backslash\{-2, 0, 2\}$;