Licenciatura MAEG, **Frequência 1**, 08/04/2016
Processos Estocásticos e Aplicações, 3^o ano, 2^o semestre

No decurso do exame não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Se tiver dúvidas, apresente-as por escrito no seu teste, para que as mesmas possam ser consideradas na correcção. `1h30m`.
Formalize e fundamente sempre as suas respostas.

1. A Empresa XIS atribui internamente uma classificação qualitativa aos seus clientes consoante o prazo pagamento habitual das suas faturas. São em três as categorias, por ordem decrescente: $\mathbf{A}^{++}$, $\mathbf{A}^{+}$ e **B**. Anualmente é feita uma reavaliação. A experiência permitiu estimar que 90% dos clientes que estavam no ano anterior classificados na categoria B, continuam na mesma categoria no ano seguinte e 10% são colocados na categoria A^{+}. Dos que estavam na categoria A^{+} no ano transacto, 10% são classificados na categoria A^{++}, 85% ficam na mesma e 5% são colocados na categoria B. Dos que estavam colocados na categoria A^{++}, as percentagens de permanência e descida são respectivamente de 90%, 10% e 0%. (50)

   (a) Justifique que pode formular o problema como uma cadeia de Markov em tempo discreto, homogénea, indique o espaço de estados e a matriz das probabilidades de transição.

   (b) Classifique os diferentes estados da cadeia. Justifique os procedimentos.

   (c) Discuta a existência de distribuição-limite no âmbito deste problema.

   (d) Em estacionaridade, qual será a percentagem de clientes em cada uma das categorias? Indique todos os cálculos que efectuar.

   (e) Calcule a distribuição estacionária da cadeia, caso exista. Justifique.

   (f) Diga se o estado A^{+} é recorrente positivo. Em caso afirmativo, obtenha o tempo médio de recorrência. Justifique.

   (g) A empresa avalia a possibilidade de criar uma categoria extra A^{*} englobando os clientes que permanecem na categoria A^{++} durante 3 anos seguidos, ininterruptamente, ou 3 em 5 desde que não desçam à categoria B (nesse prazo de 5). Em estacionaridade, qual a percentagem de clientes que num determinado ano estejam na categoria A^{*}?

2. Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com intensidade λ e seja $P_k(t) = \Pr[N(t) = k]$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. (50)

   (a) Deduza as equações diferenciais

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) \\ P_k'(t) &= -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)\,, k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

   (b) Seja T uma variável aleatória, independente de $\{N(t)\}$, com distribuição Uniforme(1,2). Calcule a média $E[N(T)]$ e a variância $V[N(T)]$.

   (c) Considere que $N(t)$ representa o número de chegada de utentes à fila do atendimento de um serviço público em $(0; t]$ em horas, com média 15 por hora. A experiência permitiu estimar que, durante o atendimento, 10% dos utentes acaba por apresentar reclamação no livro respectivo.
   Seja $Z(t)$ definido da seguinte forma:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} X_k\,, \quad \text{com } X_0 \equiv 0,$$

   e em que X_k, $\forall k \epsilon \mathbb{N}$, é uma variável aleatória que representa o atributo "utente k apresenta reclamação". $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de v.a.'s i.i.d. e é independente de $\{N(t)\}$.

      i. Explique o que pretende representar $Z(t)$ e identifique o tipo de processo aleatório associado.
      ii. Mostre que $Z(t) \frown Poisson(3t/2)$.
      iii. Calcule $\mathbb{E}[Z(1)Z(2)]$ e $\mathbb{E}[N(1)Z(2)]$.
      iv. Durante os primeiros 15m de atendimento chegaram cinco utentes. Calcule a probabilidade de que quatro deles tenha apresentado reclamação.