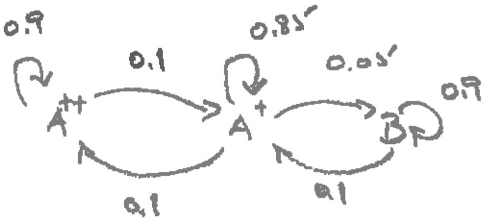

1. a) T. Discreto: período a período, Markov: transições dependem da situação anterior imediata, homogénea: $P_{ij}^{(n,n+1)} = P_{ij}^{1} = P_{ij}$

$S = \{A^{++}, A^{+}, B\}$

$$P = \begin{array}{c|ccc} & A^{++} & A^{+} & B \\ \hline A^{++} & 0.9 & 0.1 & - \\ A^{+} & 0.1 & 0.85 & 0.05 \\ B & - & 0.1 & 0.9 \end{array}$$

b) Comunicações: $A^{++} \leftrightarrow A^{+} \leftrightarrow B \leftrightarrow A^{++}$
todos os estados comunicam entre si. Cadeia Irredutível

- Periodicidade: $d(A^{++}) = 1$ pois $P_{A^{++}} > 0$ $\Rightarrow$ Todos os estados são aperiódicos
- Recorrência: todos os estados são recorrentes ou persistentes, Por ex: $1 = A^{++}$.
  Por contradição: numa reg. maior estado não existe probabilidade positiva de nunca regressar.
- Não há estados absorventes
- Cadeia Regular, Irredutível, aperiódica e Recorrente.

c) Cadeia Regular $\longrightarrow$ existe distribuição-limite e existe distribuição estacionária e são iguais.

d) $\begin{cases} \pi_1 = 0.9\pi_1 + 0.1\pi_2 \\ \pi_3 = 0.05\pi_2 + 0.9\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \pi_2 = 0.4 \\ \pi_3 = 0.2 \end{array} \right.$ $A^{++} = 1,\ A^{+} = 2,\ B = 3$

e) É igual à distribuição-limite $\pi_1 = \pi_2 = 0.4, \pi_3 = 0.2$ $= (0.4; 0.4; 0.2)$ em c)

f) $\pi_2 = \frac{1}{m_2} = 0.4 \Leftrightarrow m_2 = 5/2 = 2.5$., se não fosse recorrente positivo $\pi_2 = 0$.

g) Em estacionaridade $(\pi_1)^3 + \binom{3}{2} 0.4^3 (0.4)^2 (0.2)^0 = 0.4^3 + 0.1024 = 0.1664$

2. (a) Seja $P_k(t) = P\{N(t) = k\}$, Tendo presente Axiomas 1, 2, 3, 4

- $P[N(t+h) = 0] = P_0(t+h) = P_0(t)P(h) = P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)] = P_0(t) - \lambda h P_0(t) + o(h)$
  $P_0(t+h) - P_0(t) = -\lambda h P_0(t) + o(h) \Rightarrow \lim \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \lim \frac{o(h)}{h}$
  $\Leftrightarrow P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$
- $P[N(t+h) = k] = P_k(t+h) = P_k(t)P_0(h) + P_{k-1}(t)P_1(h) + \underbrace{\sum_{j \neq k, k-1} P_j(t) P_{k-j}(h)}$ $k \geq 1$

$$= P_k(t)[1 - \lambda h + o(h)] + P_{k-1}(t)[\lambda h + o(h)] + o(h)$$

$\Longrightarrow \lim \frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \lim \frac{o(h)}{h}$

$\Leftrightarrow P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$

b) $T \sim U(1,2)$, $f_T(x) = 1$, para $1 < t < 2$, $E[N(T)|T=x] = \lambda x = V[N(T)|T=x]$
$E[N(T)] = E[E[N(T)|T]] = E[\lambda T] = \lambda E[T] = 3/2 \lambda$
$V[N(T)] = E[V[N(T)|T]] + V[E[N(T)|T]] = E[\lambda T] + V[\lambda T] = 3/2 \lambda + 1/12 \lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda(3 + \frac{1}{6}\lambda)$

c) $N(t) \frown \text{Poisson}(15\lambda t)$, $X_k \frown B(1;0{,}1)$; $M_{N_t}(s) = e^{+15t(e^s-1)}$; $M_X(s) = 0{,}9 + 0{,}1e^s$

i) $Z(t)$: nº utentes que chegam e apresentam reclamação, $Z(t) \frown$ Poisson Composto$(15\lambda, B(0,1))$
$\{Z(t), t \geq 0\}$: Processo Poisson composto.

(ii)
$$M_{Z_t}(s) = E[e^{sZ_t}] = E[E[e^{sZ_t} | N_t]] = E[M_X(s)^{N_t}] = E[e^{N_t \ln M_X(s)}]$$
$$= M_{N_t}(\ln M_X(t)) = e^{-15t(M_X(t)-1)} = e^{+15t(0{,}9+0{,}1e^s-1)}$$
$$= e^{1.5t(e^s-1)} \longrightarrow \text{f.g.m. de Poisson}(1{,}5t)$$

(iii) $E[Z(1)Z(2)] = E[Z(1)(Z(1)+Z(1,2)]$
$= E[Z(1)^2] + E[Z(1)Z(1,2)]$
$= 1{,}5 + 1{,}5^2 + E[Z(1)]E[1,2]$ incre...
$= \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{3}{2}(1+3) = 6$

(não é necessário)
$$Z(2) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N(1)} X_k} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N(1,2)} X_k} \quad , \quad X_0 \equiv 0$$
$Z(2) = Z(1) + Z(1,2)$, incremento independente
$Z(t) \frown \text{Poisson}(1{,}5t)$

$E[N(1)Z(2)] = E[E[N(1)Z(2)|N_1]] = 0{,}1\,E[N(1)^2] + 1{,}5\,E[N(1)] = 0{,}1(15+15^2) + 1{,}5(15)$

$E[N(1)\,Z(2)|N(1)] = N_1\,E[Z(2)|N_1] = N(1)E[\sum_0^{N(1)} X_k + \sum_0^{N(1,2)} X_k | N_1]$
$= N(1)^2 E[X_k] + N(1)\,E[Z(1,2)] = 0{,}1\,N(1)^2 + N(1)\,\underbrace{E[Z(1)]}_{1{,}5}$
$= 0{,}1\,N(1)^2 + 1{,}5\,N(1)$
$\rightarrow E[N(1)Z(2)] = 1{,}5(16) + 1{,}5(15) = 1{,}5(31) = 46{,}5$

(iv) Seja Y: nº clientes, em 5, que apresentam reclamação, $Y \frown B(5; 0{,}1)$
$P(Y=4) = \binom{5}{4} 0{,}1^4 (0{,}9)^1 = 5(0{,}1)^4\, 0{,}9 = 45 \times 10^{-5}$