Instituto Superior de Economia e Gestão

ANÁLISE MATEMÁTICA II
Licenciatura MAEG
Época Normal - 30 de Maio de 2012
Duração: 2h

I

a) (1,0) Estude a natureza da série $\sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{k\log\left(\frac{n}{k}\right)}{n+k}\right)^{2n}$, com $k>0$.

b) (1,5) Desenvolva em série de potências de $x-a$ a função $f(x)=\dfrac{1}{e^{x-a}}$, com $a\in\mathbb{R}$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

II

Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{3-|x^2+y^2-1|}+sen\dfrac{1}{x^2+y^2-3}}{\left|\log\left[(x-2)^2+y^2-4\right]\right|+7}.$$

a) (2,0) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.
b) (1,0) Determine analiticamente os seguintes conjuntos:
i) Pontos fronteiros ao conjunto D_f que pertencem a D_f .
ii) Pontos fronteiros ao conjunto D_f que não pertencem a D_f .
c) (1,0) Com base na alínea anterior justifique se D_f pode ser um conjunto compacto.

III

Seja a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} x+(m+1)\,y & \text{se } x\neq y \\ 2m+x & \text{se } x=y \end{cases}.$$

a) (1,5) Discuta a existência da derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,1)$, segundo um vector genérico u, em função do parâmetro real m.
b) Faça $m=1$**.**
b1) (2,0) Estude a diferenciabilidade da função f no ponto $(1,1)$.

b2) (1,5) Existirão vectores $u \in \mathbb{R}^2$ para os quais $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,1) \neq \nabla f(1,1) \cdot u$? Em caso afirmativo, determine-os.

b3) (1,0) Com base nas alíneas anteriores, o que pode afirmar sobre a continuidade da função f no ponto $(1,1)$? Justifique convenientemente a resposta.

IV

(2,5) Considere as funções, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $h(x,y) = \left(e^{x+y}, xy, \log\left(x^2+1\right)\right)$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função cuja matriz jacobiana no ponto $(1,0,0)$ é dada por $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz jacobiana de $f \circ h$ no ponto $(0,0)$.

V

(2,5) Averigue, em função do parâmetro $\alpha \neq 0$, a existência de extremantes para a função $f(x,y,z) = \alpha\left(x^2+y^2\right) - \dfrac{e^{\alpha z^2}}{\alpha}$ e os respectivos valores extremos.

VI

(2,5) Considere uma função complexa de variável complexa não constante e inteira, $f(z)$. Mostre que as partes real e imaginária de f não podem ser iguais.

fim