Instituto Superior de Economia e Gestão

ANÁLISE MATEMÁTICA II
Licenciatura MAEG
Época de Recurso - 28 de Junho de 2012
Duração: 2h

I

(2,5) Justifique que a seguinte série é convergente e calcule a sua soma:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\log\left(\frac{n}{2n+1}\right)-\log\left(\frac{n+2}{2n+5}\right)\right).$$

II

Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{1-x^2-y^2}}{(|x|-|y|)\log(x/y)}.$$

a) (1,5) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.

b) (1,5) Dê exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a D_f e que convirja para um ponto que não pertença a D_f .

c) (1,0) Com base na alínea anterior justifique se D_f pode ser um conjunto compacto.

III

1) Seja a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yx^2}{x^2+y^2} & \text{se } \ y\neq 0\\ k \ \ \text{se} \ \ y=0\end{cases}.$$

a) (1,5) Discuta a existência da derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, segundo um vector genérico u, em função do parâmetro real k.

b) Faça $k=0$.

b1) (1,5) Estude a diferenciabilidade da função f no ponto $(0,0)$.

b2) (1,5) Estude a continuidade da função f no ponto $(0,0)$.

2) (1,5) Utilize diferenciais para calcular um valor aproximado de

$$(2,02)^2+1,97e^{2,02/1,97}.$$

IV

(2,5) Atenda à seguinte

Definição: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Diz-se que uma função $h : U \to \mathbb{R}^n$ é uma **Mudança de Coordenadas em** U se verificar as seguintes condições:

i) h é de classe C^1

ii) h é injectiva

iii) $det\ J_h\,(u) \neq 0 \ \ \forall_{u \in U}$.

Sabendo que as coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) são definidas por

$$x = \rho \cos\theta \quad y = \rho sen\theta \quad z = z,$$

prove que a função $h : U \to \mathbb{R}^3$ definida por $h(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho sen\theta, z)$ é uma mudança de coordenadas, com $U = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\right\}$.

V

(2,5) Averigue, em função do parâmetro α com $|\alpha| < 1$, a existência de extremantes para a função

$$f(x, y, z) = \alpha^2 e^{x^2} + (\alpha - 1)^2\, e^{y^2} + (\alpha + 1)^2\, e^{z^2},$$

classificando-os, em caso afirmativo. Justifique se existem extremos globais.

VI

Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u\,(x, y) = 2x + e^{-2y} sen\,(2x)$.

a) (1,0) Mostre que u é uma função harmónica em $\mathbb{R}^2$.

b) (1,5) Determine uma função f holomorfa em $\mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re} f = u$.

fim