Instituto Superior de Economia e Gestão

ANÁLISE MATEMÁTICA II
Licenciatura MAEG
Época Recurso - 1 de Julho de 2013
Duração: 2h

I

(2,0) Estude para que valores do parâmetro $k > 0$, a série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{3n-1} \frac{(2n)!}{k^n (n!)^2}$$

é absolutamente convergente.

II

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = e^{\left(\frac{1}{\log\left[(x-2)^2 + (y-2)^2\right]} \right)} + \frac{\sqrt{4x - x^2 - y}}{\sqrt{y - (x-2)^2}}.$$

a) (2,0) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.
b) (1,0) Determine analiticamente a fronteira de D_f .
c) (1,0) Justifique convenientemente se D_f é um conjunto limitado.

III

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{2x^2 + y^2}$.
a) (1,0) Determine D_f e estude a continuidade da função no seu domínio.
b) (1,5) Estude a existência de prolongamento contínuo de f ao ponto $(0,0)$, e determine-o em caso afirmativo.
c) (2,0) Seja g a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Calcule a derivada de g na origem segundo o vector $v = (1,1)$, utilizando:

c1) a definição

c2) o vector gradiente.

d) (1,0) Com base na alínea anterior o que pode afirmar sobre a diferenciabilidade de g na origem? Justifique.

IV

(2,5) Discuta em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ a existência de extremantes para a função $f(x,y) = x^4 - y^4 + \alpha xy$.

V

Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = e^{2x} sen(-2y) - 2y$.

a) (2,0) Justifique que existe uma função holomorfa f em $\mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re} f = u$ e determine-a.

b) (1,5) Determine todos os complexos z que satisfazem a equação $f'(z) = 4i$.

VI

(2,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x,y)| \leq |xy|$ .Mostre que f é diferenciável na origem.

fim