INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Normal – 4 de Junho de 2014

Duração: 2 horas

I

(2,5) Desenvolva em série de potências de $x-3$ a função $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, indicando o intervalo de convergência absoluta da série.

II

Considere a função $f:\Re^2 \to \Re$ definida por

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x-|x-y|}}{\log\left(x^2+y^2\right)}.$$

a) (1,5) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.

b) (1,0) Determine analiticamente a fronteira e o derivado de D_f.

c) (0,5) Mostre que a sucessão $u_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathrm{N}} \in D_f$ e o seu limite não pertence a D_f.

d) (1,0) Com base na alínea anterior justifique se D_f pode ser um conjunto compacto.

III

1. **(1,0)** Estude a existência de prolongamento contínuo a $\Re^2$ da função $f(x,y) = 1 + xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ e em caso afirmativo determine-o.

2. Considere a função $g : \Re^2 \to \Re$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} x + y & \textbf{se} \quad xy > 0 \\ 0 & \textbf{se} \quad \mathbf{xy \leq 0} \end{cases}.$$

   a) **(1,0)** Calcule $\nabla g(0,0)$.

   b) **(1,5)** Calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0)$, segundo qualquer vector não nulo $u \in \Re^2$.

   c) **(2,0)** Com base nas alíneas anteriores, que pode concluir quanto à diferenciabilidade da função g no ponto $(0,0)$? Justifique convenientemente.

IV

(2,0) Seja $w(r,s)$ uma função real de classe C^1 em $\Re^2$. Sejam $r = y - x$ **e** $s = y + x$ e $F(x,y) = w(r(x,y), s(x,y))$. Mostre que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial w}{\partial s}.$$

V

(2,5) Discuta em função do parâmetro $\alpha \in \Re$ a existência de extremantes para a função

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2 y + \alpha x^2 + y^2.$$

VI

Considere a função $u:\Re^2 \to \Re$ definida por $u(x,y)=e^{(k-1)(x-y)}+x^2-y^2$.

a) **(1,0)** Determine os valores de $k \in \Re$ para os quais u é uma função harmónica.

b) **(1,5)** Faça $k=1$. Determine a função inteira

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

tal que $f(0)=0$.

c) **(1,0)** Determine $f\,'(1-i)$.

fim