INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Recurso – 25 de Junho de 2014

Duração: 2 horas

I

(2,0) Estude a convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n(n+1)}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$.

II

Considere a função $f:\Re^2 \to \Re$ definida por

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{1-e^{\frac{y}{x^2}}}-\log\left(1-(x-1)^2-y^2\right)}{2+\log^4\left(x^2+|y|\right)}.$$

a) (1,5) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.

b) (1,0) Determine todos os valores de $\varepsilon>0$ para os quais seja verdadeira a frase, $D_f \subset B_\varepsilon((1,0))$, e traduza o seu significado.

c) (1,0) Mostre que $fr(D_f)\cap D_f \neq \varnothing$ e $fr(D_f)\cap(D_f)^C \neq \varnothing$. Interprete o seu significado.

d) (0,5) Com base nas alíneas anteriores justifique se D_f pode ser um conjunto compacto.

III

Considere a função $f(x,y) = x\log(xy)$.

a) **(1,0)** Indique o domínio da função, D_f, e estude a continuidade de f.

b) **(1,5)** Mostre que, sendo S uma recta que passa pela origem e está contida em D_f, o limite de f na origem relativo ao conjunto S, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y)$, existe e tem o mesmo valor para todas as rectas nas condições referidas.

c) **(1,5)** Mostre que não existe o limite de f na origem.

Sugestão: Considere o limite relativo ao conjunto $B = \left\{(x,y)\in\Re^2 : y = e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}$.

IV

Considere as funções $f:\Re^3 \to \Re^3$ e $g:\Re^3 \to \Re$ definidas por $f(x,y,z) = \left(z,-x^2,-y^2\right)$ e $g(x,y,z) = x + y + z$.

a) **(2,0)** Calcule as matrizes Jacobianas de f, g e $g \circ f$.

b) **(1,5)** Determine a direcção de crescimento máximo de $g \circ f$ no ponto $(1,0,1)$.

V

Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$.

a) **(1,5)** Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

b) **(2,0)** Justifique que f tem máximo e mínimo absolutos no conjunto $A = \{(x,y)\in\Re^2 : x^2 + y^2 \le 2\}$. Determine-os.

VI

Considere a função complexa de variável complexa $f = u + iv$.

a) **(2,0)** Mostre que, se $f = u + iv$ é holomorfa num aberto $\Omega \subset C$ com $u, v \in C^2(\Omega)$, então u e v são funções harmónicas em Ω.

b) **(1,0)** Através de um exemplo, mostre que o recíproco não é válido.