



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época de Recurso – 26 de Janeiro de 2015

Duração: 2 horas

I

(3,0) Mostre que a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-4x)^n}{n(n+2)},$$

é convergente num intervalo real compacto I . Calcule a soma da série correspondente aos extremos desse intervalo.

II

Considere a função $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y-1-x^2}}{e^{\frac{1}{2x^2-1}} + \sqrt{2-x^2-y}}.$$

a) (1,5) Determine o domínio, D_f , da função f e represente-o graficamente.

b) (1,5) Dê exemplo de uma sucessão não constante $u_n \in D_f$ tal que

$$u_n \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2} \right), \text{ e mostre que } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2} \right) \notin D_f.$$

c) (1,0) Com base na alínea anterior, justifique convenientemente se D_f pode ser um conjunto compacto.

III

Seja a função $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4y^2 - 2x + 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + a & \text{se } (x, y) \neq (1, 0) \\ 2 & \text{se } (x, y) = (1, 0) \end{cases}.$$

- a) (1,5) Para que valores da constante $a \in \mathfrak{R}$, f é contínua no ponto $(1, 0)$?
- b) (2,0) **Faça** $a = 2$. Estude a existência de derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0)$, segundo um vector genérico não nulo $u \in \mathfrak{R}^2$.
- c) (2,0) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(1, 0)$.

IV

(2,0) Seja $g(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^3$, e $\varphi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $\varphi(1) = (1, 1, 1)$ e $\varphi'(1) = (1, 2, 3)$. Calcule $(g \circ \varphi)'(1)$.

V

(2,5) Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + x \log(\alpha y + z)$, em função do parâmetro $\alpha > 0$.

VI

(3,0) Considere a função complexa de variável complexa holomorfa em C , $f(x + iy) = k(x, y) + i6xy$, com $k \in C^1(\mathfrak{R}^2)$. Determine a função k tal que $f(-i) = 1$.

fim