ANÁLISE MATEMÁTICA II

Tópicos de Resolução EN 4/6/2015

I

a) Seja $c_n = |a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)| \leq |a_n| + |b_n| = v_n \quad \forall x \in \Re$. Pelo Critério Geral da Comparação, se $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ é convergente então $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ é convergente, ou seja a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n sen(nx))$ é convergente por ser absolutamente convergente. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ é convergente pois o seu termo geral é soma dos termos gerais de duas séries convergentes, por hipótese.

b) $f(x) = f(x + 2\pi)$, o que prova ser uma função periódica.

II

$$A = \left\{ x \in \Re^n : \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + ... + x_n^{\ 2}} = 1 \right\}.$$

a) $\operatorname{int} A = \{\ \}$, $extA = \Re^n \setminus A$, $frA = A$. A é um conjunto fechado porque é igual à sua aderência e também é limitado porque está contido nalguma bola, por exemplo $A \subset B_\varepsilon((0,0,...,0))\ \forall \varepsilon > 1$, assim A é um conjunto compacto.

b) $f(M) = A$ porque f é sobrejectiva e $(g \circ f)(M) = g(A)$. Como g é contínua e A é compacto então, pelo Teorema de Weierstrass, a função $g \circ f$ tem máximo e mínimo.

III

a) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0, y) = \begin{cases} 0 & \textbf{se } \ u_1 = 0 \wedge k \in \Re \\ u_1 \textbf{y} & \textbf{se } \ u_1 \neq 0 \wedge k = 1 \end{cases}$. A existência da derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0, y)$, é independente do valor real k se $u_1 = 0$, caso contrário só existe se $k = 1$.

b) Para $k = 0$, f não é diferenciável nos pontos $(0, y)$ pois não existe a derivada parcial em ordem a *x*.

c) A função é diferenciável nos pontos $(0,y)$ pois

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1, y+h_2)-1-yh_1}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1-1}{\sqrt{h_2^{\,2}}} = \mathbf{0} \ \textbf{se} \ \mathbf{h}_1 = 0 \\ \displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}} = \mathbf{0} \ \textbf{se} \ \mathbf{h}_1 \neq 0 \end{cases}$$

IV

$D_v(f\circ g)(0,0) = \nabla(f\circ g)(0,0)\cdot v$ porque $(f\circ g)$ é diferenciável no ponto $(0,0)$ pois a função f é diferenciável em $\Re^3$ logo é diferenciável em $g(0,0)=(0,1,2)$.

$D(f\circ g)(0,0) = J_f(g(0,0))\times J_g(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix}$, assim a derivada direccional $D_v(f\circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 34$.

V

a) $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{y} + 2 = 0 \\ -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$, pois $y > 0$. $H_f(-1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ que é uma forma quadrática indefinida donde $(-1,1)$ é um ponto de sela, e assim se conclui que não existem extremantes para a função.

b) Por definição, $(-1,1)$ é um ponto de sela da função se é ponto crítico, o que já foi provado na alínea anterior, e se $\forall \varepsilon > 0\ \exists a,b \in B_\varepsilon((-1,1))\ \ f(a) < f(-1,1) < f(b)$. Como $f(-1,1) = -1$, sejam então $f(b) = f(-1+h,1) = h^2 - 1 > -1$ para $h \neq 0 \wedge |h| < \varepsilon$ e $f(a) = f(-1-h, 1+h) = -(1+h) + \log(1+h) < -1$ para $h \neq 0 \wedge |h| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

VI

Para f ser holomorfa é necessário que se verifiquem as equações de Cauchy-Riemann, $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = ny^{n-1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -nx^{n-1} \end{cases}$. Partindo da primeira equação, obtem-se $\varphi'(y) = -nx^{n-1} - n(n-1)y^{n-2}x$, donde se conclui que deverá ser $n = 1$ pois $\varphi'(y)$ é função arbitrária apenas de y. Deste modo, a função holomorfa $f(x+iy) = (x - y + C) + i(x + y)$ com $C \in \Re$, e $f' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1 + i$.

fim