Época de Recurso AMII – 25 de Junho de 2015

Soluções

I

a) $f(x)=\dfrac{1}{a^x}=e^{-x\log a}$ com $a>0$. Com base no desenvolvimento em série de MacLaurin da função exponencial obtem-se $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\log^n a}{n!}x^n$, que é uma série absolutamente convergente $\forall x\in\Re$, pois $|x|<r=\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n+1}{\log a}\right|=+\infty$.

b) Pela respectiva série, a derivada da função *f* de qualquer ordem no ponto 0 é $f^{(n)}(0)=(-1)^n\log^n a\neq 0\ \ \forall n\geq 0$, pois $a\neq 1$. Assim, 0 não é um ponto crítico de *f* pois $f'(0)=-\log a\neq 0$.

II

a) $D_f=\{(x_1,x_2)\in\Re^2:\|x\|>1\wedge\|x\|\neq 2\wedge\|x\|\leq 3\}$.

b) $\operatorname{int}D_f=\{(x_1,x_2)\in\Re^2:1<\|x\|<3\wedge\|x\|\neq 2\}$, $fr\,D_f=\{(x_1,x_2)\in\Re^2:\|x\|=1\vee\|x\|=2\vee\|x\|=3\}$, e $D_f'=\{(x_1,x_2)\in\Re^2:1\leq\|x\|\leq 3\}$. O conjunto D_f não é compacto pois apesar de ser um conjunto limitado, $D_f\subset B_\varepsilon((0,0))\ \ \forall\varepsilon>3$, não é fechado porque não contém todos os seus pontos fronteiros.

III

a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{k}{h^2}=\begin{cases}0 & \textbf{se } k=0\\ \infty & \textbf{se } k\neq 0\end{cases}$. $\forall n\in N$ só existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ se $k=0$.

c) Uma c.n. para que a função *f* seja diferenciável na origem é tomar-se $k=0$.

Calcule-se, nestas condições, o seguinte limite, $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^{\ n} h_2}{\left(\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}\right)^3} = 0$ **se** $n+1>3$, pela proposição conhecida. Como n é uma variável natural, concluímos que se $n \geq 3$ então f é diferenciável na origem. Resta estudar a diferenciabilidade da função na origem nos casos $n=1$ e $n=2$. Utilizando os limites direccionais, obtem-se

$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0) \\ h_2 = mh_1}} \varepsilon(h_1,h_2) = \begin{cases} \infty \ \textbf{se} \ n=1 \\ \textbf{não existe se} \ n=2 \end{cases}$. Conclui-se que f é diferenciável na origem se $k=0$ e $n \geq 3$.

IV

$$D(g \circ f)(1,1) = J_g\left(f(1,1)\right) \times J_f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V

Os pontos críticos são $(0,0)\ \forall \alpha \neq 0$ e $\left(\alpha, \pm\sqrt{-2\alpha}\right)\ \forall \alpha < 0$. $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\alpha \end{bmatrix}$, sendo $(0,0)$ um minimizante local se $\alpha < 0$ e um ponto de sela se $\alpha > 0$.

$H_f\left(\alpha, \pm\sqrt{-2\alpha}\right) = \begin{bmatrix} 2 & \pm 2\sqrt{-2\alpha} \\ \pm 2\sqrt{-2\alpha} & 0 \end{bmatrix}$, todos estes pontos são pontos de sela pois $\alpha < 0$. Conclui-se que apenas $(0,0)$ é um extremante da função, no caso de $\alpha < 0$, e é um minimizante local.

VI

$f(x+iy) = x^2 - y^2 + y + i2x\left(y - \frac{1}{2}\right)$, e a sua derivada é $f' = 2x + i(2y-1)$.