INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época de Recurso – 25 de Junho de 2015

Duração: 2 horas

I

a) (1,5) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x)=\dfrac{1}{a^x}$ com $a>0$, e indique o domínio de convergência da série.

b) (1,5) Seja $a\neq 1$. Usando a respectiva série, mostre que a derivada da função *f* de qualquer ordem no ponto 0, nunca se anula. Justifique se 0 é um ponto crítico de *f*.

II

Considere a função $f:\Re^2\to\Re$ definida por

$$f(x)=\frac{\log(\|x\|-1)}{\|x\|-2}+\sqrt{9-\|x\|^2}\ ,\ \text{ onde } x=(x_1,x_2) \text{ e } \|x\| \text{ é a norma de } x.$$

a) (1,5) Determine o domínio, D_f, da função f e represente-o graficamente.

b) (1,5) Determine o interior, a fronteira e o derivado do conjunto D_f, e justifique se este conjunto é compacto.

III

Seja a função $f:\Re^2 \to \Re$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y+kx}{x^2+y^2} & \textbf{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textbf{se } (x,y)=(0,0)\end{cases},\ \text{com } n\in N \textbf{ e } k\in\Re .$$

a) (1,5) Calcule o valor da derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) (2,0) Estude a existência da derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, em função dos valores de $n\in N$ **e** $k\in\Re$.

c) (2,5) Para que valores de $n\in N$ **e** $k\in\Re$, a função *f* é diferenciável na origem?

IV

(2,5) Considere as funções vectoriais $f:\Re^2\to\Re^2$ e $g:\Re^2\to\Re^3$ com *f* definida por $f(x,y)=\left(arctg\left(x^2-y\right),x^2\right)$ e *g* satisfazendo as condições

$$\begin{aligned}&\forall x\in\Re\ \ \frac{\partial g}{\partial x}(x,1)=\left(x^2,1,x\right)\\ &\forall y\in\Re\ \ \frac{\partial g}{\partial y}(0,y)=\left(0,y,0\right)\end{aligned}.$$

Determine o valor da derivada $D(g\circ f)(1,1)$.

V

(2,5) Discuta em função do parâmetro real $\alpha\neq 0$, a existência de extremantes para a função $f(x,y)=x^2+(x-\alpha)y^2$, classificando-os em caso de existência.

VI

(3,0) Considere a função inteira, $f(x+iy)=u(x,y)+i2x\left(y-\dfrac{1}{2}\right)$, com $u\in C^1\left(\Re^2\right)$.

Determine a função f tal que $f(i)=0$ e calcule a sua derivada, f'.

fim