Exercícios de Análise Matemática IV – MAEG

Capítulo III – Equação diferencial linear de ordem n

1. Dada a equação linear de 2ª ordem, $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ com $a(t)$ e $b(t)$ funções contínuas em $(c,d)\subset\Re$, suponha que $x_1(t)\neq 0$ é uma solução dessa equação. Suponha também que se pretende encontrar uma nova solução da forma $x_1(t)u(t)$ com $u(t)\neq 0$.
   Prove que essa nova solução se obtem resolvendo uma equação linear de 1ª ordem homogénea.

2. Suponha que as raízes da equação quadrática $r^2+ar+b=0$ têm partes reais negativas. Prove que toda a solução da equação $x''+ax'+bx=0$ tende para *0* quando $t\to+\infty$.

3. Considere a equação $x''+ax'+bx=0,\ a,b\in\Re$.
   a) Prove que se a equação $r^2+ar+b=0$ tem raízes iguais, então $x_1(t)=e^{-\frac{at}{2}}$ é solução da equação diferencial dada.
   b) Encontre uma nova solução da equação diferencial, da forma $x_1(t)u(t)$. Mostre que $x_1(t)u(t)$ é solução da equação diferencial sse $u(t)=C_1t+C_2$ com $C_1,C_2\in\Re$.

4. Resolva as seguintes equações:

   a) $x''-3x'+2x=0 \quad c.i.\ (t,x,x')=(0,1,-1)$
   b) $x'''-3x''+4x=0 \quad c.i.\ (t,x,x')=(0,1,-1)$
   c) $x''+2x'+x=\dfrac{e^{-t}}{t+1}$ com $t\neq -1$
   d) $x''+x'-2x=8sen(2t)$
   e) $x''+4x=\cos(2t)$
   f) $x''+9x=(t^2+1)e^{3t}$
   g) $x''-6x'+9x=2e^{3t}\cos(3t)$
   h) $x''-5x'+6x=(t^2-3)e^{t}$
   i) $x''+x=\sec(t)$.

5. Considere a equação diferencial $x^{(iv)} + 4x''' + 5x'' + 4x' + 4x = 0$. Para que condições iniciais $x(0), x'(0), x''(0), x'''(0)$, existe uma solução $x(t)$ tal que:

   a) $x(t)$ é periódica
   b) $\lim x(t) = 0$ quando $t \to +\infty$
   c) $\lim |x(t)| = \infty$ quando $t \to +\infty$
   d) $x(t)$ é limitada para $t \geq 0$.

6. Encontre todas soluções periódicas de $x^{(iv)} + 2x'' + x = 0$.

7. Considere a equação diferencial linear de 2º ordem $x'' - \frac{2}{t^2} x = 0,\ t > 0$.

   a) Verifique que $\phi(t) = t^2$ é uma solução da equação dada.
   b) Determine uma aplicação $w : (0, +\infty) \to \Re$ de modo que ϕ e $w\phi$ constituam um sistema fundamental de soluções da equação dada.
   c) Resolva o PVI $\begin{cases} x'' - \frac{2}{t^2} x = t \\ (t, x, x') = (1, 0, 1) \end{cases}$.

8. Determine a solução geral da equação $x'' - \frac{x'}{t} = t$.

9. Segundo a lei de Newton, a velocidade de arrefecimento de um corpo no ar é directamente proporcional à diferença entre a temperatura do corpo num instante *t, y(t),* e a temperatura do meio*, M(t),* no mesmo instante.

   a) Traduza este facto por meio de uma equação diferencial e resolva-a.
   b) Sabendo que a temperatura do ar é *20º C* e que o corpo arrefece de *100º C* para *60º C* em 20 minutos, determine ao fim de quanto tempo o corpo atinge *30º C*.

Capítulo V – Sistemas de equações diferenciais não lineares

1. Determine os pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

   a) $\begin{cases} x'_1(t) = x_1 - x_1^{\,2} - 2x_1x_2 \\ x'_2(t) = 2x_2 - 2x_2^{\,2} - 3x_1x_2 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ z' = z + x^2 + y^2 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x' = xy^2 - x \\ y' = xsen(\pi y) \end{cases}$

2. Considere o sistema de equações diferenciais $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

   a) Mostre que $x = y = 0$ é o único ponto de equilíbrio do sistema se $ad - bc \neq 0$.

   b) Mostre que existe uma recta de pontos de equilíbrio para o sistema se $ad - bc = 0$.

3. Estude a estabilidade dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

   a) $x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x$

   b) $x' = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x$

   c) $x' = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -6 \\ 10 & -4 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} x$

   d) $x' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$

   e) $x' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} x$

4. Considere a família uniparamétrica de equações diferenciais $\{x' = 3x - 4y, y' = ax : a \in \Re\}$.
   a) Para que valores da constante a existem dois valores próprios distintos positivos da matriz A, da correspondente equação $x' = Ax$?
   b) Faça $a = -1$. Determine os vectores próprios da matriz A e utilize essa informação para esboçar o retrato de fase.
   c) Esboce o retrato de fase da curva individualizada pelas condições iniciais $x(0) = 1, y(0) = -1$, para $a = -1$.

5. Considere o sistema $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2x^3 \end{cases}$.

   Mostre que a solução de equilíbrio $x = y = 0$ do sistema linearizado, é um ponto de cela e esboce o retrato de fase do sistema linearizado.

6. Para que valores da constante α, é estável qualquer solução do sistema $\begin{cases} x' = -3x + \alpha y \\ y' = 2x + y \end{cases}$?

7. Estude a estabilidade das soluções das equações diferenciais:
   a) $x' = x + t \quad x(0) = 1$
   b) $x' = 2t(x+1) \quad x(0) = 0$
   c) $x' = -x + t^2 \quad x(1) = 1$
   d) $x' = 2 + t \quad x(0) = 1$.

8. Estude a estabilidade das soluções $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$, da equação $x' = x(1 - x)$.

9. Considere a equação diferencial $x' = x^2$. Mostre que todas as soluções $x(t)$, com $x(0) \geq 0$, são instáveis enquanto que todas as soluções $x(t)$, com $x(0) < 0$, são assintoticamente estáveis.

10. Determine as soluções de equilíbrio de cada um dos seguintes sistemas de equações diferenciais e estude a estabilidade das mesmas:
   a) $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 1 \\ y' = 2xy \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x' = tg(x + y) \\ y' = x + x^3 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} x' = -y \cos x \\ y' = -senx \end{cases}$.