Universidade de Lisboa - Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA I

Teste 1 - 8 de abril de 2016 - Duração: 1 hora -

Sugestão de Resolução do Grupo II

Cotações: **4.** 3.0(2.0 + 1.0); **5.** 1.75(1.0 + 0.75); **6.** 1.15.

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

4. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + az = 1 \\ 2x + 2y + 2az = 0 \\ 3x + 3y + 4az = b - 1 \end{cases} \quad , \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros a e b, indicando o grau de indeterminação (ou o n^o de graus de liberdade).

A matriz do sistema é dada por

$$[A|B] = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & a & | & 1 \\ 2 & 2 & 2a & | & 0 \\ 3 & 3 & 4a & | & b-1 \end{bmatrix} \underset{L_3-3L_1}{\overset{L_2-2L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & | & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & | & -2 \\ 0 & 3 & a & | & b-4 \end{bmatrix} \underset{L_3-\frac{3}{2}L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & a & | & b-1 \end{bmatrix}.$$

- Para $a = 0$:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & b-1 \end{bmatrix}$$

  -Se $b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$, temos $r(A) = r(A|B) = 2 < 3$ e o sistema é possível e indeterminado, com um grau de liberdade.

  -Se $b \neq 1$, $r(A) = 2 < r(A|B) = 3$ e o sistema é impossível.

- Para $a \neq 0$ e $\forall b \in \mathbb{R}$, temos $r(A) = r(A|B) = 3$ e o sistema é possível e determinado.

(b) Resolva o sistema no caso em que $a = 0$ e $b = 1$, indicando o conjunto solução (ou a solução geral).

Resolução do sistema para $a = 0$ e $b = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 2y + 0z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

O Conjunto solução é

$$CS = \{(1, -1, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

5. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (4x+2)^n$ com $x \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de x para os quais a série é convergente.

A série é uma série geométrica de razão $r = 4x + 2$ e é convergente se e só se $|r| < 1$, isto é

$$|4x + 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < 4x + 2 < 1 \Leftrightarrow -3 < 4x < -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{4}.$$

A série é convergente sse $x \in \left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right[$.

(b) Calcule o valor da soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(4x+2)^n + \dfrac{(-3)^n}{n!}\right]$.

A série é a soma de duas séries convergentes e portanto é convergente se $x \in \left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right[$. A soma é

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty}(4x+2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{n!} \\ &= \frac{1^o \text{ termo}}{1-r} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{n!} - 1\right) \\ &= \frac{4x+2}{1-(4x+2)} + e^{-3} - 1 = \frac{4x+2}{-4x-1} + e^{-3} - 1, \end{aligned}$$

onde se usou a representação em série da exponencial: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$.

6. Prove que se $\mathbf{A}$ é uma matriz invertível então a sua transposta também é invertível e $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$.

$\mathbf{A}$ é invertível $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$ e como $\left|\mathbf{A}^T\right| = |\mathbf{A}| \neq 0$, temos que $\mathbf{A}^T$ também é invertível.

Além disso, por definição de matriz inversa:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

e portanto

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbf{I}^T.$$

Mas como $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T\mathbf{A}^T$ (propriedade da transposta do produto de matrizes) e $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$, concluímos que

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{I},$$

o que, por definição de matriz inversa, significa que $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$ é a inversa de $\mathbf{A}^T$. Ou seja, $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$.