

**Análise Matemática I – 1º ano MAEG**

**LISTA 10**

(1) Calcule:

- (a)  $\int_2^3 \frac{x}{x^2-25} dx$
- (b)  $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1} dx$
- (c)  $\int_{1/2}^e x \log x dx$
- (d)  $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx$

(2) Mostre que existe uma única função  $f \in C^0([0, 1])$  satisfazendo

$$\int_0^x f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

(3) Seja  $f \in C^0(\mathbb{R})$  e  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(x) = \int_{2x}^{x+x^2} f(t) dt.$$

Justifique que  $\varphi$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e mostre que  $\varphi'(1) - \varphi(1) = f(2)$ .

(4) Calcule

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$ .
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^5 dt}{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}$ .

(5) Considere  $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t dt.$$

- (a) Mostre que  $\varphi$  é diferenciável e calcule  $\varphi'$ .
- (b) Estude a monotonia de  $\varphi$  e mostre que tem um único zero em  $\mathbb{R}^+$ .

(6) Calcule a área limitada pelas curvas definidas pelas seguintes equações:

- (a)  $y = 9 - x^2$  e  $y = x^2$

(7) Determine se os seguintes integrais convergem:

- (a)  $\int_0^{+\infty} \sin(3x) dx$
- (b)  $\int_2^{+\infty} (x^2 - 3)^{-1} dx$
- (c)  $\int_1^{+\infty} x^{-3/2} \sin(x) dx$

$$(d) \int_2^{+\infty} \frac{x^2+4x+1}{(x^2+3)^2(\sqrt{x+1})} dx$$

$$(e) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-4} dx$$

$$(f) \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2(x+4)} dx$$

(8) Estude, quanto à convergência, os seguintes integrais, em função do valor de  $\alpha$  e  $\beta$  (sendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).

$$(a) \int_0^{+\infty} (x^\alpha + x^\beta)^{-1} dx;$$

$$(b) \int_{-1}^{+\infty} x \cdot (1+x^4)^\beta dx;$$

$$(c) \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx;$$

$$(d) \int_0^1 (1-x)^\beta \cdot \sin(1-x) dx;$$

### Algumas soluções de exercícios da lista 10

1. a)  $\ln(4) - \frac{1}{2} \ln(21)$ ; b)  $80/3 + \ln(3)$ ; c)  $1/16 + e^2/4 + \ln(2)/8$ ; d)  $5/24$ ;
4. a)  $1/4$ ; b)  $1/2$ ;
5. b)  $\phi$  é monótona decrescente em  $]0, 1[$  e monótona crescente em  $]1, +\infty[$ ;
6. a)  $18/\sqrt{2}$
7. a) Div; b) Conv; c) Conv; d) Conv; e) Div; f) Div;
8. a) Conv sse  $\max\{\alpha, \beta\} > 1$  e  $\min\{\alpha, \beta\} < 1$