Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2ºSemestre 2013/2014
Época Normal: 5 de Junho de 2014
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{\ln(x+2)}{3-x^2} \geq 0 \right\}$ e $B = \left\{ e^{\frac{(-1)^n}{n}} \, : \, n \in \mathbb{N} \right\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o máximo e o mínimo, caso existam, do conjunto B. B é um conjunto compacto?

(c) Escreva a fronteira e o interior de $A \cap \mathbb{Q}$ e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

(d) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

i. $\forall \delta > 0 \;\;]1-\delta, 1+\delta[\cap B \neq \emptyset$ e $]1-\delta, 1+\delta[\cap \mathbb{R} \backslash B \neq \emptyset$.

(4,0) 2. (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} (1-\cos(x))^{\ln^{-1}(x)}$.

(b) Prove, utilizando o princípio da indução matemática, que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \forall n \geq 2.$$

(4,5) 3. Dado $a \in \mathbb{R}$ considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{x}{2+x^2} + a\right) & \text{se } x \leq 0 \\ x^{-1} \displaystyle\int_1^{x+1} \frac{\ln(t)}{t} dt & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais f é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Para que valores de a a função f é diferenciável em $x = 0$?

(c) Calcule, ou prove que não existe, $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x)$.

(2,0) 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, função positiva e contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^{x} f(t) dt.$$

(a) Estude o sinal de $g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = -1$.

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^2 \frac{\sin^2(2-x)\sqrt{1-\cos(x)}}{e^x (4x^2 - x^4)^\alpha} dx$$

(2,5) 6. Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ prove que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^c f(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt.$$