Processos Estocásticos e Aplicações

Licenciatura em MAEG

Alfredo D. Egídio dos Reis

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

5. Cadeias Markov tempo contínuo
   - Processo de Nascimento Puro
   - Processo de Morte Puro
   - Processos de Nascimento e Morte
   - PNM com Estados absorventes
   - Cadeias de Markov com Espaço dos Estados Finito

6. Martingalas
   - Definições e exemplos
   - Propriedades elementares
   - Desigualdade de Kolmogorov

7. Movimento Browniano

Programa

1. Noções gerais
2. Cadeias de Markov a tempo discreto
3. Processos de Poisson
4. Cadeias de Markov a tempo contínuo
5. Martingalas
6. Movimento Browniano

Referências

Principal

Taylor, H.M. & Karlin, S. [1998]. *An Introduction to Stochastic Modeling* (3rd Edition), Academic Press, New York.

Secundária

Müller, D. [2007]. *Processos Estocásticos e Aplicações*, Colecção Económicas, Almedina, II Série, nº 3.

Taha, H.A. [2002]. Operations Research (7th Edition), MacMillan, New York.

Ross, S.M. [1996]. *Stochastic Processes* (2nd Edition), John Wiley & Sons, New York.

Noções gerais

Definição

Dado um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e um conjunto arbitrário T, um processo estocástico é uma função real e finita, $X(t, \omega)$, definida em $T \times \Omega$, que para cada t fixo, $t \in T$, é uma função mensurável de $\omega \in \Omega$. Simbólicamente,

$$\{X(t, \omega);\ t \in T\}\ .$$

Para t fixo, $t \in T$, $X(t, \omega)$ é uma v.a., um P.E. pode interpretar-se como uma família de variáveis aleatórias. Simbologia comum:

$$\{X(t)\ ; t \in T\}\ , \{X(t)\}_{t \in T}\ , \{X_t\ ; t \in T\}\ , \{X_t\}_{t \in T}\ .$$

Processo estocástico vectorial:

$$\{[X_1(t), X_2(t), \ldots, X_k(t)]\ ; t \in T\}\ .$$

Definição

Uma trajectória ou uma realização de um processo estocástico $\{X(t)\ t \in T\}$ *é uma afectação, a cada* $t \in T$*, de um valor possível de* $X(t)$.

Definição

O conjunto formado pelos sucessivos valores de uma trajectória de um processo estocástico referentes a um período limitado de tempo chama-se série temporal. Quando a trajectória é observada durante o período $T = \{1, 2, ..., n\}$ *diz-se que se está perante uma sucessão cronológica.*

Example (Processo de Bernoulli)

Seja uma sucessão infinita de provas de Bernoulli, o intervalo de tempo entre cada prova é igual à unidade, a primeira prova realiza-se no instante 0. $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, o resultado de cada prova

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{se a } t+1-\text{ésima prova é um sucesso} \\ 0 & \text{se a } t+1-\text{ésima prova é um insucesso} \end{cases}$$

$\Pr\{X(t) = 1\} = p$; $\Pr\{X(t) = 0\} = q = 1 - p$.
$X(t)$ é uma v.a. de Bernoulli e a sucessão, $\{X(t); t = 0, 1, 2, \ldots\}$ é um processo de Bernoulli.

Exemplo (Processo Binomial)

Observação de um fluxo de impulsos de Bernoulli ("1"ou "0") independentes, nos instantes $t = 0, 1, 2, \ldots$. *Pretende-se realizar a contagem do número de impulsos verificados até ao instante de amostragem* t.

$$Z(t) = \begin{cases} 1 & \textit{presença de impulso em } t \\ 0 & \textit{ausência de impulso em } t \end{cases}$$

O resultado da contagem para cada t

$$X(t) = \sum_{s=0}^{t} Z(s) \sim \mathrm{Binomial}(t+1; p)$$

A sucessão das v.a. $\{X(t); t = 0, 1, 2, \ldots\}$ *é um processo binomial.*

Exemplo (Passeio Aleatório)

Seja uma partícula em movimento que ocupando a posição inicial X_0, *observada nos pontos* $t = 1, 2, \ldots$. *Em* $t = 1$ *sofre um salto* $Z(1)$, *v.a. com f.d.* $F(.)$. *Em* $t = 1$ *salta para o nível* $X(0) + Z(1)$. *Em* $t = 2$ *verifica-se novo salto,* $Z(2)$, *v.a. i.i.d de* $Z(1)$ *e assim sucessivamente. Depois de* t *saltos a posiçãoé*

$$X(t) = X(0) + Z(1) + \ldots + Z(t) = X(t-1) + Z(t),$$

$Z(t)$, $t = 1, 2, \ldots$ *é uma sucessão de v.a. i.i.d.. A partícula realiza um passeio aleatório caracterizado pelo processo* $\{X(t); t = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Exemplo (Passeio Aleatório Simples)

Caso particular do anterior em que os saltos $Z(t) = 1, 0, -1$ *com probabilidades* p, $1 - p - q$ *e* q *respectivamente,* $p + q \leq 1$.

Especificação

De ordem 1: $X(t) \sim F_{X(t)}(x;t)$
De ordem n:
Para um conjunto arbitrário, mas finito, de valores de $t \in T$, seja $t_1, t_2, \ldots, t_n$, as correspondentes variáveis aleatórias, $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$, possuem função de distribuição conjunta,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n \,; t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{1}$$

Definição

A lei temporal associada com o processo $\{X(t); t \in T\}$, é a família constituida pelas funções (1.4) para $n = 1, 2, \ldots$ e todos os possíveis valores $t_j, j = 1, 2, \ldots, n$.

S Espaço de Estados: Domínio, valores possíveis de $X(t)$

T Conjunto dos índices, do do parâ metro.

Os processos estocásticos são distinguidos pelo seu:

- Espaço de Estados
- Conjunto de Índices
- Pelas relações de dependência entre as v.a.'s $X(t)$.

Os processos podem ter Parâmetro ou Espaço de estados discretos ou contínuos.

Tipos clássicos de processos estocásticos

- Processos com incrementos independentes
- Processos com incrementos estacionários
- Martingalas
- Processos de Markov
- Processos estacionários
- Processos de renovamento

Definição

Uma cadeia de Markov em tempo discreto $\{X_n\}$ é um processo de Markov com espaço de parâmetros discreto e espaço de estados também discreto.

É costume representar-se o espaço dos estados por (0,1,2,...), o que faremos se nada dissermos em contrário, bem como $T = (0, 1, 2, \ldots)$. Diz-se que X_n está no estado i se $X_n = i$.

Definição

Uma cadeia de Markov diz-se homogénea ou com probabilidades de transição estacionárias quando as probabilidades de transição num passo são independentes da variável tempo (i.e. do valor n).

- Probabilidade de transição para estado j em $n+1$ se estava no estado i em n:

$$P_{ij}^{n,n+1} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

- $P_{ij}^{(m,n)}$: *probabilidades de transição em* $(n-m)$ *passos*

$$P_{ij}^{m,n} = \Pr\{X_n = j | X_m = i\},$$

satisfazendo:

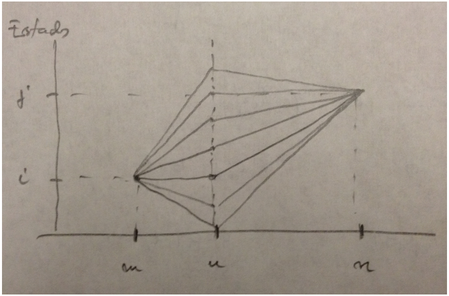
$$P_{ij}^{m,n} \geq 0,\ i,j \in S\,,\ \ \sum_j P_{ij}^{m,n} = 1\,,\ \ m < n\,.$$

Sem perda de generalidade vamos assumir que $S = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Teorema (Equação Chapman-Kolmogorov)

Para $n > u > m \geq 0$

$$P_{ij}^{(m,n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m,u)} P_{kj}^{(u,n)}, \ \forall (i,j)$$



Limitamos o estudo a cadeias homogéneas: $P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$; $P_{ij}^{s,s+n} = P_{ij}^{(n)}$.
Matriz das probabilidades de transição num passo, $\mathbf{P} = [P_{ij}]$: :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Matriz de Markov ou *matriz de probabilidades de transição* do processo. A matriz $\mathbf{P}$ é tal que

$$P_{ij} \geq 0 \qquad i,j = 0,1,2,\dots$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1 \quad i = 0,1,2,\dots$$

Especificação:
O processo fica completamente especificado quando se conhece **P** e a f. p. de X_0, $p_i = \Pr\{X_0 = i\}$, $i = 0, 1, 2, , \ldots$:

$$\begin{aligned}
&\Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\} = \\
&= \Pr\{X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \\
&\quad \times \Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \\
&= \Pr\{X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}\} \Pr\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \\
&= P_{i_{n-1}, i_n} P_{i_{n-2}, i_{n-1}} \ldots P_{i_0, i_1} p_{i_0}.
\end{aligned}$$

Definição

Designa-se por matriz de probabilidades de transição em n passos, a matriz $\mathbf{P}^{(n)} = [P_{ij}^{(n)}]$, *com*

$$P_{ij}^{(n)} = \Pr\{X_{n+s} = j | X_s = i\}$$

Equação Chapman-Kolmogorov:

Teorema (Cadeia homogénea)

$$
\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)} \ \forall (i,j) \\
\mathbf{P}^{n} &= \mathbf{P}\mathbf{P}^{n-1}
\end{aligned}
$$

Example (T&K, pag.102, Ex. 2.2)

Uma partícula move-se pelos estados $\{0, 1, 2\}$ de acordo com uma cadeia de Markov cuja matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; P^4 = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix};$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{11}{32} & \frac{11}{32} \\ \frac{11}{32} & \frac{5}{16} & \frac{11}{32} \\ \frac{11}{32} & \frac{11}{32} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}; P^{10} = \begin{bmatrix} \frac{171}{512} & \frac{341}{1024} & \frac{341}{1024} \\ \frac{341}{1024} & \frac{171}{512} & \frac{341}{1024} \\ \frac{341}{1024} & \frac{341}{1024} & \frac{171}{512} \end{bmatrix}$$

Exemplo (Um modelo de aprovisionamento)

Considere um determinado produto que é aprovisionado por ordem a satisfazer determinada procura. O reaprovisionamento de stocks faz-se ao fim de cada período de actividade $n = 0, 1, 2, \cdots$, *e consideramos que a procura total para o produto durante o período* n *é uma variável aleatória* ξ_n *cuja função de distribuição é independente do período de tempo,*

$$\Pr[\xi_n = k] = a_k \text{ para } k = 0, 1, 2, \cdots ,$$

onde $a_k \geq 0$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. *O nível de stock é examinado ao fim de cada período.*
Consideram-se os valores críticos s *e* S $(S > s \geq 0)$ *:*

Exemplo

- *Se ao fim de cada período a quantidade de stock não for superior a s então é imediatamente procurada uma quantidade de produto necessário para aumentar a quantidade de stock actual até ao nível S;*
- *Se, pelo contrário, a quantidade de stock disponível é maior que s, então não há lugar a reaprovisionamento.*

Seja X_n a quantidade de stock existente ao fim do período n imediatamente antes de eventual reaprovisionamento. Os estados do processo $\{X_n\}$ consistem nos seguintes valores do montante em stock

$$S, S-1, \cdots, +1, 0, -1, -2, \cdots,$$

Valor negativo é interpretado como procura não satisfeita e que será imediatamente preenchida através de reaprovisionamento.

- Justificar que $\{X_n\}$ é uma cadeia de Markov.
- Identifique as probabilidades de transição P_{ij}.

Particularizemos o problema considerando um modelo de aprovisionamento de peças sobressalentes, no qual apenas $0, 1$ ou 2 componentes ou peças são procurados em cada período, com f.p.

$$\Pr[\xi_n = k] = \begin{cases} 0,5 & k = 0 \\ 0,4 & k = 1 \\ 0,1 & k = 2 \end{cases}$$

e suponha $s = 0$ e $S = 2$.

Exemplo (A Urna de Ehrenfest)

Modelo matemático clássico de descrição da difusão através de uma membrana. Imagine dois recipientes contendo um total de 2a bolas (moleculas). Suponha que o primeiro recipiente, seja A, contém k bolas e o segundo recipiente, B, contém as restantes $2a - k$ bolas. Uma bola é selecionada ao acaso (todas as tiragens são igualmente prováveis) da totalidade das 2a bolas e movidas para o outro recipiente. (Uma molecula difunde-se aleatoriamente através da membrana). Cada selecção gera uma transição do processo. As bolas flutuam entre os dois recipientes com maior tendência da urna com maior concentração para a urna com menor.
Considere que Y_n é o número de bolas na Urna A no período n e defina $X_n = Y_n - a$.

- Justificar que $\{X_n\}$ é uma cadeia de Markov.
- Identifique as probabilidades de transição P_{ij}.

Exemplo (Um modelo discreto de Fila de Espera)

Clientes chegam para atendimento em determinado serviço tomam o seu lugar na fila. Durante cada período de tempo apenas um cliente é atendido, desde que haja pelo menos um cliente para atender. Se não houver qualquer cliente para atendimento não há prestação de serviço. Imaginemos por exemplo uma paragem de taxis à qual um taxi chega em intervalos de tempo fixos para prestarem serviço. Se ninguém está presente o taxi parte. Durante um período de serviço podem chegar mais fregueses.
Suponhamos que o número de clientes que chegam durante o período n é uma variável aleatória ξ_n *cuja distribuição é independente do período e é dada por:*

$$Pr[\xi_n = k] = a_k \text{ para } k = 0, 1, 2, \cdots ,$$

onde $a_k \geq 0$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$.
Assumimos também que as variáveis $\xi_1, \xi_2, \cdots$ *são independentes.*
O estado do sistema no começo de cada período é definido como

Equação Chapman-Kolmogorov:

Teorema

$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)} \; \forall (i,j) \, ; \mathbf{P}^n = \mathbf{P}\mathbf{P}^{n-1}$

Exemplo

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Estados 0, 3: absorventes; 1, 2: transientes ($\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$)
Sejam

$$T = \min\{n \geq 0; X_n = 0 \;\; ou \;\; X_n = 3\},$$

$$\begin{aligned} u_i &= \Pr\{X_T = 0 | X_0 = i\} \;\; para \;\; i = 1, 2, \\ v_i &= \mathrm{E}[T | X_0 = i] \;\; i = 1, 2. \end{aligned}$$

Exemplo (Cont.)

Para $X_0 = 1$ e $X_0 = 2$:

$$\begin{aligned} u_1 &= P_{10} + P_{11}u_1 + P_{12}u_2, \\ u_2 &= P_{20} + P_{21}u_1 + P_{22}u_2. \end{aligned}$$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 30/43; \quad u_2 = 19/43 \\ v_1 &= 90/43; \quad v_2 = 100/43. \end{aligned}$$

- Estados comunicantes
  - Cadeias irredutíveis
- Estados periódicos e aperiódicos
  - Período do estado
  - Cadeias periódicas
- Recorrência
  - Estados recorrentes ou persistentes: recorrente positivo ou nulo
  - Estados não recorrentes, transitórios, transientes

Exemplo (T&K, pag.102, Ex. 2.2, cont.)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} ; P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} ; P^4 = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{11}{32} & \frac{11}{32} \\ \frac{11}{32} & \frac{5}{16} & \frac{11}{32} \\ \frac{11}{32} & \frac{11}{32} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} ; P^{10} = \begin{bmatrix} \frac{171}{512} & \frac{341}{1024} & \frac{341}{1024} \\ \frac{341}{1024} & \frac{171}{512} & \frac{341}{1024} \\ \frac{341}{1024} & \frac{341}{1024} & \frac{171}{512} \end{bmatrix}$$

Teoremas limite

$$P^{100} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{211\,275\,100\,038\,038\,233\,582\,783\,867\,563}{633\,825\,300\,114\,114\,700\,748\,351\,602\,688} & \frac{422\,550\,200\,076\,076\,467\,165\,567\,735\,125}{1267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376} & \frac{422\,550\,200\,076\,076\,467\,165\,567\,735\,125}{1267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376} \\ \frac{422\,550\,200\,076\,076\,467\,165\,567\,735\,125}{1267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376} & \frac{211\,275\,100\,038\,038\,233\,582\,783\,867\,563}{633\,825\,300\,114\,114\,700\,748\,351\,602\,688} & \frac{422\,550\,200\,076\,076\,467\,165\,567\,735\,125}{1267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376} \\ \frac{422\,550\,200\,076\,076\,467\,165\,567\,735\,125}{1267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376} & \frac{422\,550\,200\,076\,076\,467\,165\,567\,735\,125}{1267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376} & \frac{211\,275\,100\,038\,038\,233\,582\,783\,867\,563}{633\,825\,300\,114\,114\,700\,748\,351\,602\,688} \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0.33333 & 0.33333 & 0.33333 \\ 0.33333 & 0.33333 & 0.33333 \\ 0.33333 & 0.33333 & 0.33333 \end{bmatrix}$$

Let a Markov chain with transition matrix:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Longo prazo:

$$P^8 = \begin{bmatrix} .9 & .09 & .009 & .0009 & .00009 & 9.0\times10^{-6} & 1.0\times10^{-6} \\ .9 & .09 & .009 & .0009 & .00009 & 9.0\times10^{-6} & 1.0\times10^{-6} \\ .9 & .09 & .009 & .0009 & .00009 & 9.0\times10^{-6} & 1.0\times10^{-6} \\ .9 & .09 & .009 & .0009 & .00009 & 9.0\times10^{-6} & 1.0\times10^{-6} \\ .9 & .09 & .009 & .0009 & .00009 & 9.0\times10^{-6} & 1.0\times10^{-6} \\ .9 & .09 & .009 & .0009 & .00009 & 9.0\times10^{-6} & 1.0\times10^{-6} \\ .9 & .09 & .009 & .0009 & .00009 & 9.0\times10^{-6} & 1.0\times10^{-6} \end{bmatrix}$$

Cadeias Regulares, i.e., com $\mathbf{P}$ regular :

- número finito de estados;
- $\mathbf{P}$, com $P_{ij}^{(k)} > 0 \ \forall (i,j)$, para algum k.

Existe Distribuição limite

$$\begin{aligned} \pi &= (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_N) \\ \pi_j &= \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(k)} > 0. \end{aligned}$$

Teorema (Cadeia Regular)

A distribuição limite $(\pi_0, \pi_1, ..., \pi_N)$ é a única solução não negativa de:

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum \pi_k P_{kj} \ \ \forall j = 0, 1, \cdots, N \Leftrightarrow \pi = \pi\mathbf{P} \\ \sum_{k=0}^{N} \pi_k &= 1 \end{aligned}$$

Notas:

- $\pi\mathbf{P^2} = (\pi\mathbf{P})\,\mathbf{P} = \pi; \cdots ;\ \pi\mathbf{P^n} = \pi;$
- Distribuição-limite:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(k)}\ \forall j \in S$$

- Distribuição estacionária:

$$\lim_{n\to\infty} Pr\{X_n = i\}\ \forall i \in S$$

  - Pode não existir o lim. $\Rightarrow \nexists$ distr. estacionária;
  - Pode existir o lim. mas não é d.prob. $\Rightarrow \nexists$ distr. estacionária;
- Se existe distr.-limite, existe distr. estacionária e coincidem ;
- Pode não existir distr.-limite e existir distr. estacionária;
- Pode existir distr. estacionária e não existir distr.-limite.

Example ($S = 1, 2$)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots$$

$$P_{ii}^{(n)} = \begin{cases} 1 & i = 1,2 \quad n \text{ par} \\ 0 & i = 1,2 \quad n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \nexists \text{ dist.lim.}$$

$$\begin{aligned} Pr\{X_n = 1\} &= Pr\{X_n = 1 | X_0 = 1\} Pr\{X_0 = 1\} \\ &\quad + Pr\{X_n = 1 | X_0 = 2\} Pr\{X_0 = 2\} \\ &= P_{11}^{(n)} \times \frac{1}{2} + P_{21}^{(n)} \times \frac{1}{2} = 1/2 \\ \Rightarrow Pr\{X_n = 2\} &= 1/2. \end{aligned}$$

Teoremas limite

Definition

Um processo estocástico é um *processo de contagem* $\{X(t);\ t \geq 0\}$ se $X(t)$ é o número de acontecimentos em $[0, t)$.

Definition

Um processo de contagem $\{X(t);\ t \geq 0\}$ com $X(0) = 0$ diz-se um *Processo de Poisson* de intensidade λ se verificar as seguintes condições:

(a) $\{X(t);\ t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários e independentes;

(b) Para qualquer $t > 0$, $X(t)$ tem distribuição de Poisson de média λt.

Várias maneiras de identificar um *Pr. Poisson*:

- Processo de Nascimento c/ taxa de nascimento constante;
- Proc. de Renovamento c/ tempo inter-chegadas Exponencial;
- Processo com espaço de chegadas nos inteiros não-negativos, incrementos estacionários e saltos unitários.

Seja $N((a,b])$: N<u>o</u> eventos no intervalo $(a,b]$.

Axiomas

A1: *Seja* $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m$. *As v.a.'s* $N((0,t_1]), N((t_1,t_2]), \ldots, N((t_{m-1},t_m])$, *são independentes.*

A2: $\forall t \geq 0, h > 0,\ N((t,t+h]) \stackrel{d}{=} N((0,h]) \equiv N(h)$.

A3: $\exists$ *const.* $\lambda > 0$:

$$Pr[N((t,t+h]) \geq 1] = \lambda h + o(h) \text{ qdo } h \downarrow 0\,,\ \lim_{h\downarrow 0}\frac{o(h)}{h} = 0$$

A4: $Pr[N((t,t+h]) \geq 2] = o(h)$ *qdo* $h \downarrow 0$.

Comentários

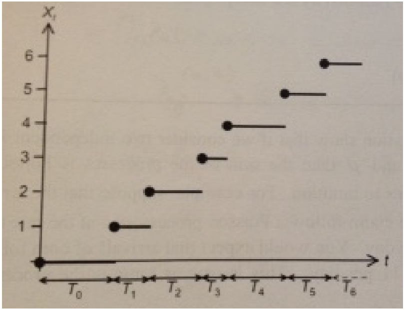
A1: Eventos independentes;

A2: Estacionaridade: $N((s,t]) \stackrel{d}{=} N(t-s)$. Processo homogéneo.

A3: *Lei dos Acontecimentos Raros*

A4: Ausência de eventos simultâneos

É suficiente o conhecimento da distribuição $N(t)$.



Taxas das intensidades de transição. *Matriz Geradora*

Os Axiomas 3 e 4 podem ser escritos da seguinte forma:

Axiomas

(i): $Pr[X(t+h) - X(t) = 1] = \lambda h + o(h),\ h \downarrow 0;$

(ii): $Pr[X(t+h) - X(t) = 0] = 1 - \lambda h + o(h),\ h \downarrow 0$

(iii): $Pr[X(t+h) - X(t) \neq 0; 1] = o(h),\ h \downarrow 0$

$$\mu_{ij} = \begin{cases} -\lambda & se \quad j = i \\ \lambda & se \quad j = i+1 \\ 0 & outros \end{cases}$$

A Matriz Geradora é contituída pelas intensidades, "*i* para *j*". Não são probabilidades, as linhas têm soma igual a "0".

As Equações diferenciais de Kolmogorov constroem-se a partir de:

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h) \ \forall (i,j)\,.$$

Teorema

O tempo de espera, $W_n \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$

Teorema

A sucessão de tempos entre chegadas sucessivas,
$S_0, S_1, \ldots, S_{n-1} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Erlang}(1, \lambda) \ \ (\equiv \mathrm{Exp}(\lambda))$

Teorema

Para $0 < u < t$, $0 \leq k \leq n$,

$$N(u)|N(t) = n \sim \mathrm{Binomial}(n; p = u/t)$$

Teorema

Suponha-se que se deu um evento em $S_0 = s \in (0; t]$. *Então,*
$S_0|N(t) = 1 \frown \mathrm{Uniforme}\left((0; t]\right)$.

- Processsso de Poisson não homogéneo.
  Axioma 3 é modificado. A3*:

$$Pr[N((t, t+h]) \geq 1] = \lambda(t)h + o(h), \; h \downarrow 0 \,,$$

- Processo de Poisson generalizado
- Combinação de processos de Poisson independentes
- Processo de Poisson misto
- Processo de Poisson composto

Processo de Poisson composto, $\{X_t; t \geq 0\}$:

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$$

com $\{N_t; t \geq 0\}$ Processo de Poisson e $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sequência de v.a.'s i.i.d. e independente de $\{N_t\}$.

$$E[X_t] = \lambda t \times E[Y]\,; \quad V[X_t] = \lambda t \times E[Y^2]\,;$$

$$\begin{aligned} F_{X_t}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_Y^{(*n)}(x) Pr[N_t = n]; \\ M_{X_t}(s) &= M_{N_t}(\ln M_Y(s)) = \exp\{\lambda t\,(M_Y(s) - 1)\}\ . \end{aligned}$$

Aplicação em Teoria do Risco: Sinistros chegam a uma seguradora segundo um pr. de Poisson, com intensidade λ e montante individual i: Y_i.

Para um dado λ fixo $N_t \frown \text{Poisson}(\lambda t)$. Se λ for uma realização de uma variável aleaória, seja Λ, então $N(t)$ não condicional em λ tem distribuição Poisson mista.
Se

$$\Lambda \frown \text{Gama}(r; \beta = p/(1-p)) \Rightarrow N(t) \frown \text{Binomial negativa}(r; p)$$

com função probabilidade

$$\begin{aligned} f(k|r,p) &= \int_0^\infty e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) \\ &= \frac{\Gamma(r+k)}{k!\Gamma(r)} p^k (1-p)^r , \end{aligned}$$

sendo $U(\cdot)$ a f.d. de Λ, conhecida por distribuição estrutural.

$\{X(t), t \geq 0\}$

- Tenhamos presente a propriedade de Markov e $P_{ij}(s,t) = Pr\{X(t) = j | X(s) = i\}$;
- Vamos tratar apenas cadeias homogéneas: $P_{ij}(t) = Pr\{X(s+t) = j | X(s) = i\}$;
- Recuperemos os **Axiomas** do Pr. de Poisson (de outra forma):

Axiomas

(i): $Pr[X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) = x] = \lambda h + o(h), \; h \downarrow 0;$

(ii): $Pr[X(t+h) - X(t) = 0 | X(t) = x] = 1 - \lambda h + o(h), \; h \downarrow 0$

(iii): $X(0) = 0.$

Notas: As Probabilidades acima não dependem de x. O Processo de Poisson é um processo de nascimento puro.

Generalizemos o Processo de Poisson permitindo a possibilidade dos incrementos (**Nascimentos**) dependerem do no. eventos já ocorridos.

Axiomas (Processo de nascimento puro)

(i): $Pr[X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) = k]$
$= P_{k,k+1}(h) = \lambda_k h + o(h),\ h \downarrow 0;$

(ii): $Pr[X(t+h) - X(t) = 0 | X(t) = k]$
$= P_{k,k}(h) = 1 - \lambda_k h + o(h),\ h \downarrow 0$

(iii): $Pr[X(t+h) - X(t) < 0 | X(t) = k] = 0,\ k \geq 0$

(iv): $X(0) = 0.$

Teorema

Seja $P_n(t) = \Pr\{X(t) = n\}$. $P_n(t)$ *satisfaz o sistema de equações diferenciais, para* $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda_0 P_0(t) \\ P_n'(t) &= -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

com as condições iniciais

$$P_0(0) = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad n > 0.$$

Teorema

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} \\ P_n(t) &= \lambda_{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_n x} P_{n-1}(x) dx \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Quando as taxas $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda$ temos o Processo de Poisson.
Quando $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ são todos diferentes:

Teorema

$$P_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t},$$

$$P_1(t) = \lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} + \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_1} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \right),$$

$$P_n(t) = \lambda_0 \ldots \lambda_{n-1} [B_{0,n} \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} + \ldots B_{n,n} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}], \ \textit{para } n > 1,$$

$$B_{0,n} = [(\lambda_1 - \lambda_0) \ldots (\lambda_n - \lambda_0)]^{-1},$$

$$B_{k,n} = \left[\prod_{i=0, i \neq k}^{n} (\lambda_i - \lambda_k) \right]^{-1},$$

$$B_{n,n} = [(\lambda_0 - \lambda_n) \ldots (\lambda_{n-1} - \lambda_n)]^{-1}.$$

Demonstração por indução.

Sejam S_k o tempo decorrido entre o k-ésimo e o $k+1$-ésimo nascimento, e $W_k = \sum_{i=0}^{k-1} S_i$, o instante do nascimento k.

Teorema

$$S_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda_k), \forall k = 0, 1, \ldots$$

e são independentes.

Teorema

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$ *para todo o t fixo, se e só se a série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ *diverge.*

Se em t, $X(t) = k$, o processo pode mover-se posteriormente para $k-1$. P_{ij}

Axiomas (Processo de morte puro)

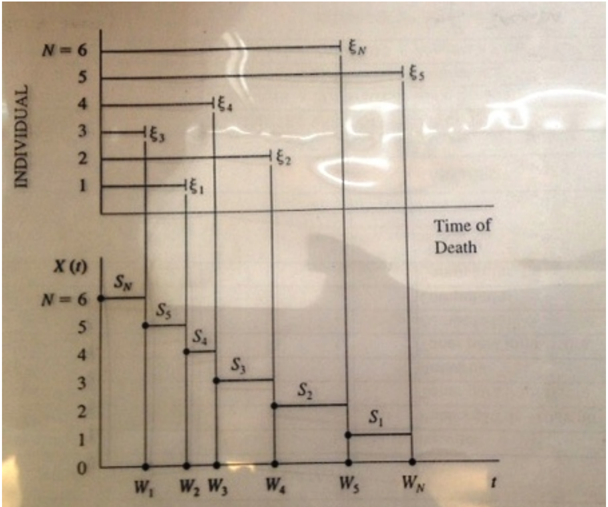
(i): $P_{i,i-1}(h) = \mu_k h + o(h),\ h \downarrow 0,\ i = 1, \ldots, N;$

(ii): $P_{ii}(h) = 1 - \mu_k h + o(h) =,\ h \downarrow 0,\ k = 1, \ldots, N;$

(iii): $P_{ij}(h) = 0, i < j;$

(iv): $X(0) \equiv N;$

Processo de Morte Puro



2.2 The linear death process. As depicted here, the third individual is the first to die, the first individual is the second to die, etc.

Se em t, $X(t) = n$, o processo pode mover-se posteriormente para $n-1$ ou $n+1$. $P_{ij}(h) = Pr[X(t+h) = j|X(t) = i]$, $S = \{0, 1, \ldots\}$

Axiomas (Processo de nascimento e morte)

(i): $P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \; h \downarrow 0, \; i \geq 0;$

(ii): $P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h) =, \; h \downarrow 0, \; i \geq 1;$

(iii): $P_{ii}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) =, \; h \downarrow 0, \; i \geq 0;$

(iv): $P_{ij}(0) = \delta_{ij};$

(v): $\mu_0 = 0, \lambda_0 > 0, \; \mu_i, \lambda_i > 0, i = 1, 2, \ldots;.$

Aplicações em desenvolvimento de populações, filas de espera...

Matriz Geradora do processo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 \ldots & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Em modelos de desenvolvimento de populações, "modelos lineares", com Taxas de **Natalidade** e **Mortalidade**:

1. $\lambda_i = \lambda$: Tx Natalidade constante, entradas por imigração;
2. $\lambda_i = i\lambda$: λ – Taxa de natalidade por indivíduo;
3. $\lambda_i = i\lambda + a$: Entradas por nascimento como em (2) e por imigração;
4. $\mu_i = \mu$: Saídas por emigração;
5. $\mu_i = i\mu$: μ – Taxa de mortalidade por indivíduo,
6. $\mu_i = i\mu + b$: Saída por morte, como em (5) e por emigração.

Nota: O processo de Poisson é um processo de emigração pura.

Equações de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} P_{ik}(s) P_{kj}(t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s) \; \forall (i,j) \, .$$

Matricialmente:

$$[P_{ij}(t+s)] = \mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s) \, .$$

Taxas de transição ou intensidades de transição ou forças de transição (não são probabilidades) supõe-se que $P_{ij}(t)$ é contínua e diferenciável em t:

$$a_{ij} = \left. \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \right|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h} \, ,$$

com

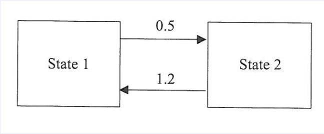
$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & se \quad j \neq i \\ 1 & se \quad j = i \end{cases}$$

Exemplo (Processo de Poisson)

$$a_{ij} = \begin{cases} -\lambda & se & j = i \\ \lambda & se & j = i + 1 \\ 0 & outros & \end{cases}$$

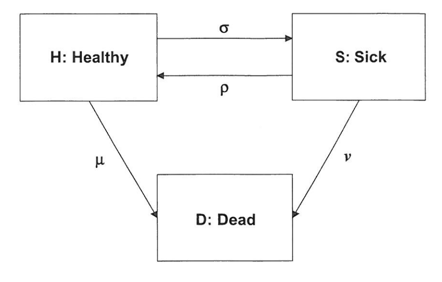
A Matriz Geradora, $\mathbf{A}$, é contituída pelas intensidades, "i para j", as linhas têm soma igual a "0".

Exemplo (Processo com 2 estados. Grafo e Matriz geradora)



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1.2 & -1.2 \end{pmatrix}$$

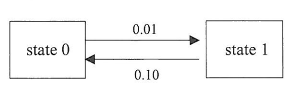
Exemplo (Modelo Saúde-Doença-Morte)



,

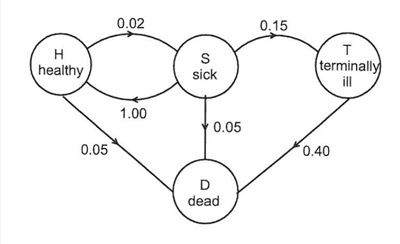
$$A = \begin{pmatrix} -\sigma - \mu & \sigma & \mu \\ \rho & -\rho - \nu & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo



$$\frac{d}{dt}P_{01}(t) = P_{00}(t)\mu_{01} + P_{01}(t)\mu_{11} = 0,01P_{00}(t) - 0,10P_{01}(t)$$

Exemplo


0.02
0.15
H
healthy
S
sick
T
terminally
ill
1.00
0.05
0.05
0.40
D
dead

Equações diferenciais de Kolmogorov, progressivas e regressivas

Teorema (Equações regressivas de Kolmogorov)

$$P'_{ij}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t), \quad i \geq 1;$$

$$P'_{0j}(t) = -\lambda_0 P_{0j}(t) + \lambda_0 P_{1j}(t);$$

com as condições iniciais $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h) = & \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \\ & = P_{i,i+1}(h) P_{i+1,j}(t) + P_{ii}(h) P_{ij}(t) + P_{i,i-1}(h) P_{i-1,j}(t) + o(h) \\ & = P_{i+1,j}(t) \lambda_i h + P_{ij}(t) \left[1 - (\lambda_i + \mu_i) h\right] + P_{i-1,j}(t) \mu_i h + o(h) \\ & = \end{aligned}$$

$\square$

Em PNM havendo uma transição em t, tem-se:

$$\begin{aligned} i \to i+1 \quad c.p. \quad \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} \\ i \to i-1 \quad c.p. \quad \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} \end{aligned}$$

São frequentes aplicações com $\lambda_0 = 0$, processos lineares sem migração: $\lambda_k = k\lambda$, $\mu_k = k\mu$. Quantidades de interesse, *e.g.*:

u_i: Probabilidade de absorção no estado "0", partindo de i;

w_i: Tempo médio de absorção partindo do estado i;

Análise baseada no 1° passo:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} u_{i+1} + \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} u_{i-1} \\ u_0 &= 1\,. \end{aligned}$$

$$w_i = \frac{1}{\lambda_i+\mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} w_{i+1} + \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} w_{i-1}\,.$$

S_i: Tempo de permanência no estado i; $S_i \frown Exp(\lambda_i+\mu_i)$.

Quantidades de interesse, e.g.:

- Probabilidade de absorção no estado "0", partindo de m:

$$u_m = \frac{\sum_{i=m}^{\infty} \rho_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i}, \quad \text{se} \sum_{i=i}^{\infty} \rho_i < \infty$$

- Se $\sum_{i=m}^{\infty} \rho_i = \infty$ então $u_m = 1$ e o tempo médio até à absorção partindo de m

$$w_m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i} + \sum_{k=1}^{m-1} \rho_k \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i}$$

  se $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \rho_i)^{-1} < \infty$

- $\rho_i = \frac{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i}$.

$\{X(t); t \geq 0\}$, Pr. Markov com $S = (0, 1, 2, \ldots, N)$. $P_{ij}(t)$ satisfaz

a) $P_{ij}(t) \geq 0$
b) $\sum_{j=0}^{N} P_{ij}(t) = 1, \ \forall i \in S$
c) $P_{ik}(s+t) = \sum_{j=0}^{N} P_{ij}(s) P_{jk}(t) \ \ t, s \geq 0$, matricialmente

$$\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s) \ \ t, s \geq 0$$

d) $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$; matricialmente

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

Matriz $\mathbf{A}$ das taxas de transição infinitesimais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_{01} & \cdots & q_{0N} \\ q_{10} & -q_1 & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{N0} & q_{N1} & \cdots & -q_N \end{bmatrix}, \text{com}$$

$$\begin{aligned} q_i &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} \\ q_{ij} &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{P_{ij}(h)}{h}, i \neq j \end{aligned}$$

Na forma matricial,

$$\mathbf{A} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}$$

Recorrendo a $\mathbf{P}(t+h) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(h) = \mathbf{P}(h)\mathbf{P}(t)$, $h \downarrow 0$

$$\frac{\mathbf{P}(t+h) - \mathbf{P}(t)}{h} = \frac{\mathbf{P}(t)[\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}]}{h} = \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}\mathbf{P}(t)$$

Portanto

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{P}(t),$$

com $\mathbf{P}'(t) = [P'_{ij}(t)]$.
As equações podem ser resolvidas, sob a condição inicial,

$$\mathbf{P}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}$$

O tempo de permanência no estado i tem distribuição exponencial com parâmetro q_i.

O conceito de **Martingala** tem origem numa estratégia de jogo. Seja X_n a fortuna de um jogador após a $n-$ésima jogada de um jogo equitativo.

Definição

Diz-se que $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ *é uma martingala se para todo o* $n = 0, 1, \ldots$, *e* $x_0, \ldots, x_n$,

1. $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty$;
2. $\mathrm{E}(X_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = x_n$.

Em média a fortuna de um jogador na jogada seguinte é a mesma que tinha à partida.

Exemplo

Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *v.a. independentes com média nula. Então* $X_n = x_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n$ *é uma martingala.*

A generalidade dos jogos de casino não é equitativo, mas sim enviesado *contra* o jogador ("São jogos de perca esperada").

SuperMartingalas e SubMartingalas

Os jogos de casino não são equitativos, são enviesados contra o jogador.

Definição

$\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ *é uma* **supermartingala** *se os ganhos esperados do jogador são negativos, i.e. se para todo o* $n = 0, 1, \ldots$ *e* $x_0, \ldots, x_n$,

1. $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty$;
2. $\mathrm{E}(X_{n+1}|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \leq x_n$.

De modo análogo se define **submartingala**.

Exemplo

Seja uma população em que cada indivíduo origina um número aleatório, i.i.d., de elementos, com média μ. *Seja* Z_n *a dimensão da população no instante n.* $M_n = Z_n/\mu^n$ *é uma martingala.*

Definição de martingala, mais geral:

Definição

Considerem-se dois processos estocásticos $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ *e* $\{Y_n; n = 0, 1, \ldots\}$.*A sequência* $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ *é uma martingala em relação a* $\{Y_n; n = 0, 1, \ldots\}$ *se para todo o* $n = 0, 1, ...$

(i) $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty$,

(ii) $\mathrm{E}(X_{n+1}|Y_0, Y_1, \ldots, Y_n) = X_n$.

- Y_n pode ser interpretado como o estado do sistema em n
- $\mathcal{H}_n = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ traduz a informação/histórico, n.
- O **histórico** determina X_n no sentido em que X_n é uma função de $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ - é a função $\mathrm{E}(X_{n+1}|Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$.

Example

Seja $Y_0 = 0$ *e* $Y_1, Y_2, \ldots$ *v.a. i.i.d. com* $E[Y_n] = 0$ *e* $V[Y_n] = \sigma^2$. *Prove que o seguintes processos são martingalas:*

- $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$, *com*

$$X_n = \sum_{j=0}^{n} Y_j$$

- $\{W_n; n = 0, 1, \ldots\}$, *com*

$$W_n = \left(\sum_{j=0}^{n} Y_j\right)^2 - n\sigma^2.$$

Definition

A sequência $\{X_n\}$ é uma *submartingala* em relação a $\{Y_n\}$ se para $n = 0, 1, \dots,$

(i) $\mathrm{E}[X_n^+] < \infty$, onde $X_n^+ = \max\{0, X_n\}$,

(ii) $\mathrm{E}(X_{n+1}|Y_0, Y_1, \dots, Y_n) \geq X_n$.

(iii) X_n é uma função de $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$.

Definition

A sequência $\{X_n\}$ é uma *supermartingala* em relação a $\{Y_n\}$ se para $n = 0, 1, \dots,$

(i) $\mathrm{E}[X_n^-] > -\infty$, onde $X_n^- = \min\{0, X_n\}$,

(ii) $\mathrm{E}(X_{n+1}|Y_0, Y_1, \dots, Y_n) \leq X_n$.

(iii) X_n é uma função de $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$.

- $E[X_{n+1}] = E[E[X_{n+1}|\mathcal{H}_n]] = E[X_{n+1}] = \ldots = E[X_0], \forall n \geq 0$
- $E[X_{n+k}|\mathcal{H}_n] = E[E[X_{n+k}|\mathcal{H}_n]] = E[X_{n+k-1}|\mathcal{H}_n] = \ldots = E[X_{n+1}|\mathcal{H}_n] = X_n, \forall k \geq 1;$
- Sejam os incrementos: $Z_n = X_n - X_{n-1}$, $Z_0 = X_0$.
    - $Cov[Z_n; Z_{n+k}] = 0$, aplicando a propriedade iterativa de $E[.]$.
    - $E[Z_n] = 0$. $Var[X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[Z_i]$
- Recorrendo à desigualdade de Jensen pode demonstra-se que se $\{X_n\}$ é martingala então $\{|X_n|\}$ é submartingala.

Definition (Tempo de Markov)

Uma variável aleatória T é um *tempo de Markov* ou *"stopping time"* ou ainda *"optional stopping"* em relação a $\{Y_n\}$ se T toma valores em $0, 1, \ldots, \infty$ e se, para todo o $n = 0, 1, \ldots,$ o acontecimento $\{T = n\}$ é determinado por $H_n = (Y_0, \ldots, Y_n)$.

Seja

$$\widetilde{X}_n = \begin{cases} X_n & \text{se} \quad n < T \\ X_T & \text{se} \quad n \geq T \end{cases} \tag{2}$$

Prova-se que se $\{X_n\}$ é uma martingala, submartingala ou supermartingala em relação a $\{Y_n\}$, então a sequência $\{\widetilde{X}_n\}$ tem a propriedade correspondente.

Demonstram-e vários teoremas enunciando condições para que numa (super)martingala $\mathrm{E}[X_0](\geq) = \mathrm{E}[X_T]$.

Uma martingala $\{X_n\}$ tal que $\{\mathrm{E}[X_n]\}$ seja limitada, ou uma supermartingala não negativa $(X_n \geq 0, \forall n)$, converge com probabilidade um.

Theorem (Desigualdade Kolmogorov p/ submartingalas ñ negativas)

Seja $\{X_n\}$ *uma submartingala não negativa* $(X_n \geq 0, \forall n)$. *Então para qualquer m positivo,*

$$\Pr\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > m\} \leq \frac{\mathrm{E}[X_n]}{m}.$$

Corollary

Seja $\{X_n\}$ *uma martingala. Então para todo o m positivo,*

$$\Pr\{\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| > m\} \leq \frac{\mathrm{E}[|X_n|]}{m}.$$

Corollary

Seja $\{X_n\}$ *uma martingala não negativa. Então para todo o m positivo,*

$$\Pr\{\max_{0\leq k<\infty} X_k > m\} \leq \frac{\mathrm{E}[X_0]}{m}. \tag{3}$$

Theorem (Desigualdade de Kolmogorov para supermartingalas não negativas)

Seja $\{X_n\}$ *uma supermartingala não negativa* $(X_n \geq 0, \forall n)$*. Então para qualquer m positivo,*

$$\Pr\{\max_{0\leq n<\infty} X_n > m\} \leq \frac{\mathrm{E}[X_0]}{m}. \tag{4}$$

Movimento Browniano

O movimento Browniano é o movimento de partículas num fluido ou gás, por consequência da colisão das moléculas do fluido nas partículas. O seu nome deve-se a Robert Brown, botânico e físico do século XIX, que observou pela primeira vez o fenómeno do movimento de grãos de pollen em plantas.
No início do século XX Einstein publicou a análise teórica do movimento Browniano.

Em matemática é designado por processo de Wiener em honra de Norbert Wiener.

Movimento Browniano ou Processo de Wiener

Definição

O movimento Browniano com coeficiente de difusão $\sigma^2 > 0$, é um processo estocático $\{B(t)\}_{t \geq 0}$, com $B(0) = 0$, a verificar os seguintes postulados:

1. tem incrementos independentes, i.e. para quaiquer $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, $B(t_1) - B(t_0), ..., B(t_n) - B(t_{n-1})$ são independentes;
2. $B(t+s) - B(s)$ tem distribuição normal com média nula e variância $\sigma^2 t$;
3. $t \longrightarrow B(t)$ é contínua.

Movimento Browniano ou Processo de Wiener

- O movimento Browniano é uma martingala a tempo contínuo, i.e. para $0 \leq r_1 < ... < r_n < s$, tem-se que $E(B_t | B_{r_1}, ..., B_{r_n}, B_s) = B_s$,
- ou numa forma menos rigorosa

$$E(B_t | B_r, r \leq s) = B_s,$$

pois

$$\begin{aligned} E(B_t | B_r, r &\leq s) = E(B_s + B_t - B_s | B_r, r \leq s) \\ &= B_s + E(B_t - B_s | B_r, r \leq s) = B_s. \end{aligned}$$

Trajectória do Movimento Browniano

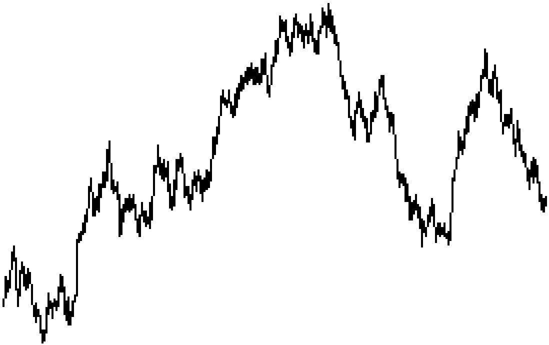


Figura: Trajectória do movimento Browniano

Movimento Browniano Standard

- $\sigma = 1$ movimento Browniano standard
- $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ movimento Browniano standard $\Rightarrow$ $\{\sigma B(t)\}_{t\geq 0}$ movimento Browniano com coeficiente de difusão σ^2
- **Basta por isso estudar o movimento Browniano standard**

- Note-se que

$$\begin{aligned} \Pr\{B(t+s) &\leq y|B(s)=x\} = \\ &= \Pr\{B(s+t)-B(s) \leq y-x\} = \\ &= \Phi\left(\frac{y-x}{\sigma\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

- Supondo que $0 \leq s < t$,

$$\begin{aligned} Cov[B(s), B(t)] &= E[B(s)\{B(t)-B(s)+B(s)\}] = \\ &= E[B(s)^2] + E[B(s)\{B(t)-B(s)\}] = \\ &= \sigma^2 s + E[B(s)]E[B(t)-B(s)] = \\ &= \sigma^2 s \end{aligned}$$

Princípio da reflexão. A distribuição do máximo.

O objectivo desta secção é determinar a distribuição de

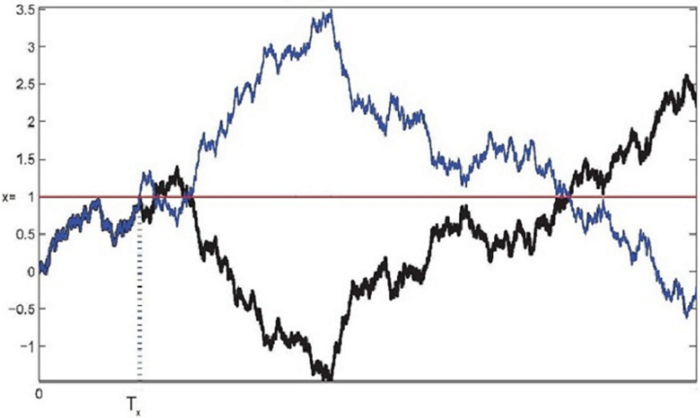
$$M(t) = \max_{0 \le u \le t} B(u).$$

- Seja $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ um movimento Browniano standard.
- Considerem-se as trajectórias para as quais $B(t) > x$, para algum $t > 0$.
- Seja $T_x = \min\{\tau \geq 0 : B(\tau) = x\}$ (é um stopping time).
- Defina-se

$$B^*(u) = \begin{cases} B(u) & u \leq T_x \\ x - [B(u) - x] & u > T_x \end{cases}$$

que se obtém por reflexão de $B(u)$ em x.

Princípio da reflexão. A distribuição do máximo.



Princípio da reflexão. A distribuição do máximo.

- Os postulados do movimento Browniano garantem que a cada trajectória que atravesse x, correspondem duas trajectórias $B(u)$ e $B^*(u)$ igualmente verosímeis.

$$\begin{aligned} \Pr\{B(t) &> x\} = \Pr\{B(t) > x | T_x \leq t\} \Pr\{T_x \leq t\} + \\ + \Pr\{B(t) &> x | T_x > t\} \Pr\{T_x > t\} = \\ &= \Pr\{B(t) > x | T_x \leq t\} \Pr\{T_x \leq t\} \end{aligned}$$

- Pelo princípuio da reflexão $\Pr\{B(t) > x | T_x \leq t\} = 1/2$. Assim

$$2 \Pr\{B(t) > x\} = \Pr\{T_x \leq t\},$$

ou seja fazendo a mudança de variável $y = z\sqrt{t}$

$$\begin{aligned} \Pr\{T_x &\leq t\} = 2(1 - \Phi(x/\sqrt{t})) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-y^2/2)\sqrt{t} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-y^2/2) dy. \end{aligned}$$

Princípio da reflexão. A distribuição do máximo.

- A densidade de T_x obtém-se derivando, de onde sai

$$\begin{aligned} f_{T_x}(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-x^2/(2t)) \frac{1}{2} x t^{-3/2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi t^3}} x \exp(-x^2/(2t)), \; t > 0. \end{aligned}$$

- Note-se que

$$\Pr\{T_x < +\infty\} = \lim_{t \to +\infty} \Pr\{T_x \leq t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-y^2/2) dy = 1.$$

- A variável T_x não tem valor esperado.

- Seja

$$M(t) = \max_{0 \leq u \leq t} B(u).$$

- Note-se que como $M(t) > x$ se e só se $T_x < t$, se tem que

$$\begin{aligned} \Pr\{M(t) &\geq x\} = \Pr\{T_x \leq t\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-y^2/2) dy. \end{aligned}$$

O princípio da reflexão permite ainda demonstrar (ver livro) que a probabilidade de que $B(t)$ tome o valor zero pelo menos uma vez no intervalo $(t, t+s)$,é

$$\vartheta(t, t+s) = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t}{t+s}} = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

- Seja $\{B(t)\}$ um movimento Browniano Standard. Então os seguintes processos são também movimentos Brownianos standard:

$$B_1(t) = cB(t/c^2), c > 0,$$
$$B_2(t) = B(t+h) - B(h),\ h > 0.$$

- Seja $\{B(t)\}$ um movimento Browniano Standard. Ao processo estocástico $\{R(t)\}$ com $R(t) = |B(t)|$ dá-se o nome de **movimento Browniano refletido na origem.**
- É fácil demonstrar que

$$E(R(t)) = \sqrt{2t/\pi}$$

e

$$Var(R(t)) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) t.$$

Seja $\{B(t)\}$ um movimento Browniano Standard. Seja T o primeiro momento em que o movimento toma o valor zero. Ao processo estocástico $\{A(t)\}$ dá-se o nome de movimento Browniano absorvido na origem.

$$A(t) = \begin{cases} B(t) & t \leq T \\ 0 & t > T. \end{cases} .$$

Demonstra-se que

$$\Pr\{A(t) > y | A(0) = x\} = \Phi\left(\frac{y+x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{t}}\right).$$

Se $A(0) = x > 0$ então $A(t)$ é uma v.a. mista e

$$\Pr\{A(t) = 0 | A(0) = x\} = 2\left[1 - \Phi_t(x)\right] = 2\left[1 - \Phi(x/\sqrt{t})\right]$$

Seja

$$T_{ab} = \min\{t \geq 0; W(t) = a \text{ ou } W(t) = b\}.$$

- Para o movimento Browniano com parâmetros μ e σ^2 tem-se que

$$u(x) = \Pr\{W(T_{ab}) = b | W(0) = x\} = \frac{\exp(-2\mu x/\sigma^2) - \exp(-2\mu a/\sigma^2)}{\exp(-2\mu b/\sigma^2) - \exp(-2\mu a/\sigma^2)}.$$

- Se $a < x < b$ então

$$E(T_{ab}|W(0) = x) = \frac{1}{\mu}\left[u(x)(b-a) - (x-a)\right].$$

Exemplo

Suponha que o preço de um activo financeiro é bem descrito por um m.B. com drift $\mu = 0.1$ *e coeficiente* $\sigma^2 = 4$. *Um accionista compra uma unidade ao preço de 100 u.m. e vai vendê-la se o preço atingir o valor 110 u.m. ou se descer par 95 u.m.. Qual é a probabilidade de que venda a ganhar?*

Um processo estocástico $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ é designado por movimento Browniano geométrico com deriva α se $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ com $Y(t) = \log X(t)$ é um movimento Browniano com deriva $\mu = \alpha - \sigma^2/2$. De modo equivalente $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano geométrico, começando em $X(0)$, se

$$X(t) = X(0)\exp(Y(t)) = X(0)\exp\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t),\right]$$

onde $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano standard, com $B(0) = 0$.

O movimento Browniano geométrico é utilizado na modelação dos preços dos activos, transaccionados num mercado perfeito. Sendo $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ pontos do tempo, os racios sucessivos

$$\frac{X(t_1)}{X(t_0)}, \frac{X(t_2)}{X(t_1)}, \ldots, \frac{X(t_n)}{X(t_{n-1})},$$

são v.a. independentes, ou seja as variações percentuais de intervalos disjuntos são independentes.

$$
\begin{aligned}
E[X(t)|X(0)] &= X(0)E\left[\exp\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma B(t)\right]\right] = \\
&= X(0)\exp\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]E\left[\exp\left(\sigma B(t)\right)\right] = \\
&= X(0)\exp\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]\exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 t\right) = X(0)\exp(\alpha t)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
E[X(t)^2|X(0)] &= X(0)^2 E\left[\exp\left[2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + 2\sigma B(t)\right]\right] = \\
&= X(0)^2 \exp\left[2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] E\left[\exp\left[2\sigma B(t)\right]\right] = \\
&= X(0)^2 \exp\left[2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] E\left[\exp\left(2\sigma\sqrt{t}\xi\right)\right] = \\
&= X(0)^2 \exp\left[2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] \exp(2\sigma^2 t) = \\
&= X(0)^2 \exp\left[2\left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right].
\end{aligned}
$$

Assim

$$
Var[X(t)|X(0)] = X(0)^2 \exp(2\alpha t)(\exp(\sigma^2 t) - 1).
$$

Seja $A < 1 < B$, e calcule-se, com

$$T = \min\{t \geq 0; X(t)/X(0) = A \text{ ou } X(t)/X(0) = B\}$$

a

$$\Pr\left\{\frac{X(T)}{X(0)} = B\right\}.$$

Com $a = \log(X(0)A)$ e $b = \log(X(0)B)$ e $x = \log X(0)$ tem-se

$$\begin{aligned}\Pr\left\{\frac{X(T)}{X(0)} = B\right\} &= \frac{\exp(-2\mu x/\sigma^2) - \exp(-2\mu a/\sigma^2)}{\exp(-2\mu b/\sigma^2) - \exp(-2\mu a/\sigma^2)} = \\ &= \frac{1 - A^{-2\mu/\sigma^2}}{B^{-2\mu/\sigma^2} - A^{-2\mu/\sigma^2}} = \frac{1 - A^{1-2\alpha/\sigma^2}}{B^{1-2\alpha/\sigma^2} - A^{1-2\alpha/\sigma^2}}.\end{aligned}$$

Exemplo

Suponha que o preço de um activo sé bem descrito por um movimento Browniano geométrico com deriva $\alpha = 1/10$ *e* $\sigma^2 = 4$. *Um expeculador compra ao preço de 100 doláres e vende se o preço subir a 110 ou descer a 95. Qual a probabilidade de vender em lucro?*

Suponhamos que nos é oferecida uma **opção de compra europeia (European Call Option)** com preço de exercício 100 e maturidade 2, isto é se detivermos a opção, temos o direito, mas não dever, de comprar a opção por 100, no momento 2. Se o preço da acção em 2 for 80, não exercemos a opção. O resultado será $(X_2 - 100)^+ = \max\{X_2 - 100, 0\}$. A questão que se coloca é a de saber qual é o preço justo para esta opção.

- Não temos de afectar probabilidades para calcular o preço na ausência de arbitragem.
- Um esquema que permita ter lucro, sem qualquer hipótese de perda é designada por oportunidade de arbitragem.
- Supomos que nos mercados não existem tais oportunidades.
- Considere-se apenas um ramo da árvore. Suponhamos que pagamos c por esta opção no instante 1, depois de observarmos que $X_1 = 90$.

	acção	opção
sobe	30	$20 - c$
desce	-10	$-c$

Suponhamos que compramos x unidades do activo e y unidades da opção, onde valores negativos indicam que vendemos em vez de comprarmos. Podemos escolher x e y de modo a que o resultado seja o mesmo quer o valor do activo suba ou desça, i.e.

$$30x + (20 - c)y = -10x - cy,$$

que é equivalente a $y = -2x$. Quando $y = -2x$, o lucro é $-10x + 2cx = 2x(c - 5)$. Então se $c > 5$, podemos fazer um lucro grande comprando um número grande de unidades do activo e vendendo o dobro das unidades das opções. Se $c < 5$ fazemos o oposto, i.e. vendemos x unidades do activo e compramos o dobro das unidades em opções. Portanto neste caso o único preço sensato da opção no momento 1 seria 5.

A medida da Martingala

- $\left\{e^{\theta B_t - t\frac{\theta^2}{2}}\right\}_{t\geq 0}$ é uma martingala relativamente a $\{B_t\}_{t\geq 0}$.
- Então se $\mu = r - \sigma^2/2$,tem-se que $\{e^{-rt}X_t\}_{t\geq 0}$ com $X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)$ é uma martingala relativamente a $\{B_t\}_{t\geq 0}$.

A fórmula de Black-Scholes

- Em 1973 Fisher Black e Myron Scholes publicam um artigo apresentando a sua célebre fórmula.
- Black, Fischer; Scholes, Myron (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy 81 (3): 637-654.
  http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black_scholes73.pdf
- Hipóteses do Modelo:
  - O preço do activo segue um Movimento Browniano Geométrico
  - Não há oportunidades de arbitragem
  - A taxa de juro é constante, a mesma para todas as maturidades e a mesma para depósitos e empréstimos
  - Short-selling ilimitado (venda de um activo que não se possui)
  - Não há impostos ou custos de transação
  - O activo pode ser transaccionado contínuamente e em quantidades infinitesimais.

A fórmula de Black-Scholes

Objectivo: Determinar o preço justo de uma opção europeia de compra $(X_t - K)^+$, com preço de exercício K e maturidade t, com base no modelo para o valor de um activo da forma

$$X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)$$

com $\{B_t\}_{t\geq 0}$ a ser o movimento Browniano standard. μ é a taxa de crescimento exponencial e σ a volatilidade, que são supostas constantes. Se também supusermos que a taxa de juro r é constante, então o valor descontado do preço do activo é

$$e^{-rt}X_t = X_0 \exp((\mu - r)t + \sigma B_t).$$

(1 u.m. em t vale hoje $exp(-rt)$).
Extrapolando os resultados da secção anterior, podemos dizer que os preços para serem consistentes têm de derivar de uma medida da martingala, i.e.

$$\mu = r - \sigma^2/2$$

Exemplo

Suponha que no dia 25 de Fevereiro de 2013 um jornal financeiro listava os seguintes preços de opções de compra para fins de Julho de um determinado activo:

P. de exercício	75	80	85
Preço	11	$8\frac{1}{8}$	$5\frac{1}{2}$

Nesse dia o activo era transacionado a $81\frac{5}{8}$. *Considerando uma taxa de juro anual de 4% e escolhendo para a volatilidade o valor de 0.3 compraria a opção de compra com preço de exercício 80?*

Solução

$t = 5/12$, $X_0 = 81.625$, $K = 80$, $\mu = r - \sigma^2/2 = -0.05$

$\log(K/X_0) - \mu t = -0.18026$

$\sigma\sqrt{t} = 0.19364$

$\alpha = -0.18026/0.19364 = -0.9309$

$X_0\Phi(\sigma\sqrt{t} - \alpha) - e^{-rt}K\Phi(-\alpha) = 7.76$

A fórmula de Black-Scholes

$$E[e^{-rt}(X_t - K)^+] = X_0 \Phi(\sigma\sqrt{t} - \alpha) - e^{-rt} K \Phi(-\alpha)$$

com $\alpha = (\log(K/X_0) - \mu t)/(\sigma\sqrt{t})$ e $\mu = r - \sigma^2/2$.

- Se fixarmos o valor de r, o preço B-S é uma função crescente com a volatilidade. O valor da volatilidade que origina o preço da opção é designado por volatilidade implícita.