LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Análise Numérica

Licenciatura em MAEG

Época Normal, 04/06/2015

Tópicos de Resolução

1. Considere a equação $\arctan(x+1) - 2x = 0$.

(a) *Mostre que a equação tem uma única solução* $z \in \mathbb{R}$. *Utilize a sucessão* $x_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(x_n + 1)$ *para determinar uma aproximação de* z *com erro inferior a* 0.5×10^{-3}.

A função $f(x) = \arctan(x+1) - 2x$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - 2 < 0$. Assim, f tem no máximo uma raiz em $\mathbb{R}$. Como $f(0) \times f(1) < 0$, a função terá pelo menos uma raiz no intervalo $[0,1]$. Concluímos pois que a equação tem uma e uma só solução em $\mathbb{R}$ e que essa solução está no intervalo $[0,1]$.

Por outro lado a equação dada é equivalente a $x = \frac{1}{2}\arctan(x+1)$, pelo que a solução da equação será exactamente o ponto fixo de $g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x+1)$. A função g é contínua, diferenciável e crescente (uma vez que $g'(x) = 1/(1+(x+1)^2) > 0$), pelo que temos

i. $g([0,1]) = [g(0), g(1)] \approx [0.392699; 0.553574] \subset [0,1]$

ii. g é Lipschitziana e $L = \max\limits_{[0,1]} |g'(x)| = 1/4$

Estão pois verificadas as condições do Teorema do ponto fixo, sendo a sucessão indicada convergente para z, qualquer que seja $x_0 \in [0,1]$.

i	x_i	$\frac{L}{1-L}\|x_i - x_{i-1}\|$
0	0.5	-
1	0.491397	0.286771×10^{-2}
2	0.490068	0.442944×10^{-3}

Deste modo, a aproximação $x_2 = 0.490068$ verifica a estimativa de erro proposta.

(b) *Escolha um intervalo no qual possa garantir a convergência do método de Newton e utilize-o para obter uma aproximação de* z *com erro inferior a* 0.5×10^{-6}.

Tomando o mesmo intervalo da alínea anterior, vemos que f é contínua e diferenciável, $f(0) \cdot f(1) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$. Como além disso

$$\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| = -0.523599 < (1-0), \qquad \left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| 0.496028 < (1-0)$$

são verificadas todas as condições de convergência do método de Newton, independentemente da aproximação inicial $x_0 \in [0,1]$. Considerando $K = \frac{\max|f''|}{2\min|f'|} = \frac{1}{6}$, e notando que para $x_0 = 0.5$ se tem $|z - x_0| \leq 0.5$, podemos concluir que $|x_n - z| \leq \frac{1}{K}(K/2)^{2^n} = 6(1/12)^{2^n}$. Para que a precisão pedida seja atingida basta tomar $n = 3$.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.5 \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.489833 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.489824 \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.489824
\end{aligned}
$$

Assim, a aproximação $x_3 = 0.489824$ verifica a majoração de erro proposta.

2. *Considere o sistema de equações*

$$
\left\{
\begin{array}{c}
2x_1 - x_2 \sin(x_1 + x_2) = 0 \\
\\
\cos(x_1 + x_2) + 3x_2 = 0
\end{array}
\right. .
$$

(a) *Mostre que o sistema tem uma e uma só solução em $Z \in \mathbb{R}^2$ e construa uma sucessão $X^{(n)}$ convergente para essa solução.*

O sistema proposto é equivalente a

$$
x_1 = \frac{x_2}{2}\sin(x_1 + x_2) = g_1(x_1, x_2), \quad x_2 = -\frac{1}{3}\cos(x_1 + x_2) = g_2(x_1, x_2)
$$

Da segunda equação decorre que, necessariamente, $x_2 \in [-1/3, 1/3]$ e, considerando este resultado na primeira equação, vemos que $x_1 \in [-1/6, 1/6]$. Qualquer solução do sistema pertence pois ao conjunto $\Omega = [-1/6, 1/6] \times [-1/3, 1/3]$. Basta então mostrar que o sistema tem uma e uma só solução em Ω. A função $g = (g_1, g_2)$ é claramente contínua, diferenciável e invariante em Ω. Relativamente à contratividade, temos

$$
J_g = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2}\cos(x_1 + x_2) & \frac{1}{2}\sin(x_1 + x_2) + \frac{x_2}{2}\cos(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{3}\sin(x_1 + x_2) & \frac{1}{3}\sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}
$$

$$
\|J_g\|_\infty \leq \max\{\frac{1/3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1/3}{2}, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\} = \max\{5/6, 2/3\} = \frac{5}{6} < 1
$$

Sendo g contínua, invariante e contractiva, o teorema do ponto fixo garante que tem uma e uma só solução em Ω (e portanto em $\mathbb{R}^2$) e que o método do ponto fixo converge para a solução, qualquer que seja a aproximação inicial $X^{(0)} \in \Omega$. A sucessão pedida é então:

$$\left\{\begin{array}{l} X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \mathbb{R}^2 \\ \left\{\begin{array}{lcl} x_1^{(n+1)} & = & \frac{x_2^{(n)}}{2}\sin(x_1^{(n)} + x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} & = & -\frac{1}{3}\cos(x_1^{(n)} + x_2^{(n)}) \end{array}\right. , n \geq 0 \end{array}\right. .$$

(b) *Especifique quantas iterações teria que calcular para que* $\|\boldsymbol{X}^{(n)} - Z\|_\infty < 0.5 \times 10^{-6}$.

Relativamente ao número de iterações, podemos usar a estimativa de erro *a priori*, $\|Z - X^{(n)}\|_\infty \leq (5/6)^n \|Z - X^{(0)}\|_\infty \leq \frac{2}{3}(5/6)^n$. Com esta estimativa de erro, somos levados a concluir que se realizarmos mais que 78 iterações o erro fica abaixo do limiar proposto.

(c) *Ao aplicar o método de Newton ao sistema, com* $X^{(0)} = (1/10, 1/10)$*, obtemos* $X^{(1)} = X^{(0)} + Y^{(0)}$*. Escreva o sistema linear que deve ser resolvido para determinar* $Y^{(0)}$*, calcule duas iterações do método de Jacobi e diga quantas mais iterações deveriam ser calculadas para que o erro de resolução do sistema linear fosse inferior a* 0.5×10^{-6}. O sistema a resolver para calcular $Y^{(0)}$ é

$$J_f(X^{(0)})Y^{(0)} = -f(X^{(0)}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1.90199 & -0.296676 \\ -0.198669 & 2.80133 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1^{(0)} \\ Y_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.180133 \\ -1.28007 \end{pmatrix}$$

A matriz de sistema é de diagonal estritamente dominante, pelo que o método de Jacobi é convergente, qualquer que seja a aproximação inicial considerada. Tomando como aproximação inicial o vetor $W^{(0)} = 0$, as iterações pretendidas são

$$W^{(1)} = (-0.0947075, -0.456949), \qquad W^{(2)} = (-0.165983, -0.463666)$$

O erro após estas duas iterações pode ser majorado por

$$\|Y^{(0)} - W^{(2)}\|_\infty \leq \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \|W^{(2)} - W^{(1)}\|_\infty,$$

em que, $\|C\|_\infty = \max\{\frac{0.296676}{1.90199}, \frac{0.198669}{280133}\} = 0.155982$. Substituindo na fórmula anterior, temos que $\|Y^{(0)} - W^{(2)}\|_\infty \leq 0.0132$. A determinação do número, k, de iterações adicionais pode ser conseguida resolvendo $0.0132 \times (0.155982)^k < 0.5 \times 10^{-6}$, o que nos leva a $k \geq 6$.

3. *Considere a seguinte tabela de valores de uma função* $f \in C^\infty[0, 4]$ *que verifica* $\|f^{(n)}\|_\infty \leq n$.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0.54	1.34	1.00	0.30

(a) *Determine o polinómio $p(x)$ que interpola f nos pontos da tabela, utilize-o para estimar o valor de $f(1.5)$ e obtenha um majorante para o erro cometido.*
Construindo uma tabela de diferenças divididas, rapidamente se chega a

$$p_4(x) = 0.0908333x^4 - 0.778333x^3 + 1.82917x^2 - 0.601667x$$

pelo que a nossa estimativa será $f(1.5) \approx p_4(1.5) = 1.04609$. A estimativa de erro será

$$\begin{aligned} |f(1.5) - p_4(1.5)| \leq & \frac{\|f^{(5)}\|_\infty}{5!} |1.5 \times (1.5-1) \times (1.5-2) \times (1.5-3) \times (1.5-4)| \\ = & \frac{5}{5!} \times 1.40625 = 0.0585938 \end{aligned}$$

(b) *Mostre que o polinómio $p(x)$ verifica $\|p^{(n)}\|_\infty > n, \;\; n = 2, 3$. Comente.*

$$p_4''(x) = 3.65834 - 4.67x + 1.09x^2, \quad p_4'''(x) = -4.67 + 2.18x$$

Vemos pois que $\|p_4^{(2)}\|_\infty = 3.65834 > 2$ e que $\|p_4^{(3)}\|_\infty = 4.67 > 3$. A não verificação destas condições não é de estranhar, já que o processo de interpolação apenas garante igualdade nos valores da função e não nas suas derivadas.

(c) *Utilize o método de Romberg para obter a melhor estimativa possível para $\int_0^4 f(x)\,dx$.*

$$\begin{aligned} T_{0,0} =& \frac{4}{2}(f(0) + f(4)) = 0.6 \\ T_{1,0} =& \frac{2}{2}(f(0) + 2f(2) + f(4)) = 2.98 \\ T_{2,0} =& \frac{1}{2}(f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + f(4)) = 3.03 \\ T_{0,1} =& T_{1,0} + \frac{T_{1,0} - T_{0,0}}{3} = 3.77333 \\ T_{1,1} =& T_{2,0} + \frac{T_{2,0} - T_{1,0}}{3} = 3.04667 \\ T_{0,2} =& T_{1,1} + \frac{T_{1,1} - T_{0,1}}{15} = 2.99822 \end{aligned}$$

A nossa melhor estimativa será pois $\int_0^4 f(x)\,dx \approx 2.99822$.

(d) *Utilizando diferenças finitas, obtenha uma aproximação de $f'(2)$ e apresente um majorante para o erro cometido.*
Usando diferenças centradas de ordem 2, temos $f'(2) \approx \frac{f(3)-f(1)}{2\times 1} = 0.23$. O erro é majorado, em valor absoluto, por $\frac{h^3}{6}\|f^{(3)}\|_\infty \leq \frac{1^3}{6} \times 3 = \frac{1}{2}$.

4. *Considere o problema de valores iniciais*

$$y'(t) = \frac{1}{2 + y(t)^2}, \quad y(0) = 0$$

Utilize o método de Euler progressivo com $h = 0.2$ para determinar uma aproximação de $y(1)$. Estime o erro cometido.

Considerando que a função $f(t, y) = \frac{1}{2+y^2}$ é contínua nas duas variáveis e Lipschitziana em y, é aplicável o teorema de Picard que garante a existencia e unicidade de solução para o problema de valor inicial indicado, pelo menos localmente em tempo.

$$\begin{aligned}
u_0 &= y(0) = 0 \\
y(0.2) \approx u_1 &= u_0 + 0.2 \times \frac{1}{2 + u_0^2} = 0.1 \\
y(0.4) \approx u_2 &= u_1 + 0.2 \times \frac{1}{2 + u_1^2} = 0.199502 \\
y(0.6) \approx u_3 &= u_2 + 0.2 \times \frac{1}{2 + u_2^2} = 0.297551 \\
y(0.8) \approx u_4 &= u_3 + 0.2 \times \frac{1}{2 + u_3^2} = 0.393312 \\
y(1.0) \approx u_5 &= u_4 + 0.2 \times \frac{1}{2 + u_4^2} = 0.486133
\end{aligned}$$

$$|y(1.0) - u_5| \le \frac{M \times 0.2}{2L}(e^L - 1) \le \frac{1/8}{2 \times \frac{1}{4}}(e^{1/4} - 1) = 0.0710064$$

- Como $|y'| < 1/2$ e $y(0) = 0$, podemos garantir que $|y| < 1/2$ para $t \in [0, 1]$.
- $|y''| = \left|\frac{-2y'y}{(2+y^2)^2}\right| \le \frac{2|y|}{(2+y^2)^3} \le \frac{2\times 1/2}{8} = \frac{1}{8}$
- $|f'_y| = \left|\frac{-2y}{(2+y^2)^2}\right| \le \frac{2\times 1/2}{4} = \frac{1}{4}$.

Resolva apenas uma das seguintes questões:

5. *Supondo que a sucessão definida recursivamente por*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{f'(x_n)^3}$$

converge para uma solução da equação $f(x) = 0$, mostre que a ordem de convergência é pelo menos três.

Trata-se de um método de ponto fixo em que a função iterado é dada por

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}\frac{f(x)^2 f''(x)}{f'(x)^3}$$

Basta então mostrar que $g'(z) = g''(z) = 0$. Ora,

$$\begin{aligned}
g'(x) =& 1 - \frac{f'(x)^2 - f''(x)f(x)}{f'(x)^2} - \frac{1}{2}\left[(2f'(x)f(x) + f(x)f'''(x))f'(x)^3 - \right.\\
&\left. -3f''(x)f'(x)^2 f(x)^2 f''(x)\right] / (f'(x)^6)\\
=& \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2} - \frac{1}{2}f(x)\cdot\frac{(2f'(x) + f'''(x))f'(x) - 3f''(x)^2 f(x)}{f'(x)^4}\\
=& f(x)\left[\frac{f''(x)}{f'(x)^2} - \frac{1}{2}\frac{2f'(x)^2 f''(x) + f(x)f'(x)f'''(x) - 3f(x)f''(x)^2}{f'(x)^4}\right]
\end{aligned}$$

Ora, como $g'(z) = f(z)W(z)$ e $f(z) = 0$, facilmente se conclui que $g'(z) = 0$. Por outro lado $g''(z) = f'(z)W(z) + f(z)W'(z) = f'(z)W(z)$. Finalmente, como

$$W(z) = \frac{2f'(z)^2 f''(z) - 2f'(z)^2 f''(z)}{2f'(z)^4} = 0$$

concluímos finalmente que $g''(z) = 0$.

6. *Considere um conjunto de dados $(x_i, y_i), i = 0, \cdots, n$, e a respetiva reta de regressão $y = \alpha + \beta x$. Mostre que a reta de regressão passa necessariamente no ponto de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$, designado por baricentro.*

O sistema normal é dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos a reta de regressão

$$y = \frac{\overline{y}\cdot\overline{x^2} - \overline{xy}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} + \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}x$$

Resta verificar que $y(\overline{x}) = \overline{y}$, o que decorre imediatamente ao substituir $y = \overline{y}$ e $x = \overline{x}$ na expressão da reta de regresssão.

Cotação: **1**. (a) 2.0 (b) 2.0 **2**.(a) 2.0 (b) 2.0 (c) 2.0 **3**. (a) 1.5 (b) 1.5 (c) 2.0 (d) 2.0
4. 2.0 **5**. 2.0 **6**. 2.0