

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em época especial

07/09/2012

1. Considere a equação não linear $f(x) = 0$, em que $f(x) = e^{-x} - x^2$.
 - (a) Mostre que f tem uma e uma só raiz no intervalo $[0, 1]$.
 - (b) Considere o método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = x + \frac{1}{4}(e^{-x} - x^2)$. Mostre que o método converge para a raiz de f , qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$.
 - (c) Calcule 3 iterações do método do ponto fixo mencionado na alínea anterior e estime quantas mais iterações deveriam ser calculadas de modo a que a solução aproximada tenha 5 algarismos significativos.

2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Para que valores de a pode garantir a convergência do método de Jacobi ?
 - (b) Considere $a = 1$, calcule 3 iterações do método de Jacobi a partir da aproximação inicial $(0, 0, 0)^T$, e determine quantas mais iterações deveriam ser calculadas de modo a que o erro, medido na norma infinito, seja inferior a 0.5×10^{-4} .
1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f .

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	12	10	7	5	6

- (a) Calcule aproximações de $\int_0^4 f(x) dx$ usando a fórmula dos trapézios e a fórmula de Simpson compostas.
 - (b) Determine o polinómio de menor grau possível que interpola f nos pontos da tabela, utilize-o para estimar $f(3/2)$ e, supondo que $|f^{(5)}(x)| < 3$, $0 < x < 4$, apresente um majorante para o erro cometido.
 - (c) Determine a função da forma $g(x) = ax^2 + b$ que melhor se ajusta aos primeiros 3 pontos da tabela, no sentido dos mínimos quadrados.
2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} e^t y'(t) = \cos(ty(t)), & t \in]0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- (a) Mostre que o problema tem uma e uma só solução $y \in C^\infty([0, 1])$.
 - (b) Determine um valor aproximado de $y(1)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.25$ e apresente uma estimativa do erro cometido (sugestão: poderá ser importante mostrar que $|y(t)| \leq 1$).