Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Numérica

Exame em Época Normal 17/06/2013

Tópicos de Resolução
Parte I

1. Considere a função $f(x) = exp(x^2)$.

   (a) *Determine o conjunto* $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : |cond_f(x)| < 10\}$.

   $$|cond_f(x)| < 10 \Leftrightarrow \left| x\frac{f'(x)}{f(x)} \right| < 10 \Leftrightarrow |x|\frac{2|x|e^{x^2}}{e^{x^2}} < 10$$
   $$2|x|^2 < 10 \Leftrightarrow x^2 < 5 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$$

   Concluímos assim que $\Omega =]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.

   (b) *Admita que $\tilde{x}$ é uma aproximação de $x \neq 0$ que possui 5 algarismos significativos e que $x, \tilde{x} \in \Omega$. O que pode concluir acerca erro relativo que afecta $\tilde{y} = f(\tilde{x})$?*

   $$|\varepsilon_y| \approx |cond_f(x)||\varepsilon_x| = 2x^2\frac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leq 2|x| \times 0.5 \times 10^{-5} \leq \sqrt{5} \times 10^{-5}$$

   Observe-se que a eliminação de $|x|$ apenas é possível por se considerar que $x \neq 0$. Uma vez que $\sqrt{5} > 1$ esta majoração apenas garante 4 algarismos significativos no cálculo de y.

2. Considere a equação $e^x - 3x - 0.5 = 0$.

   (a) *Identifique todas as soluções desta equação, localizando-as em intervalos de amplitude inferior a 0.5.*

   Note-se que $f(x)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$, estritamente decrescente em $]-\infty, \ln 3]$ e estritamente crescente em $[\ln 3, +\infty[$, sendo que $f(\ln 3) \neq 0$. O Teorema de Rolle garante que nestas condições f terá no máximo duas raízes reais. Como por outro lado $f(0) \cdot f(0.5) < 0$ e $f(1.5) \cdot f(2) < 0$, o teorema do valor intermédio garante que existe pelo menos uma raíz no intervalo $]0, 0.5[$ e outra no intervalo $]1.5, 2[$. Juntando os dois resultados podemos concluir que a equação tem exactamente duas raízes, $z_1 \in]0, 0.5[$ e $z_2 \in]1.5, 2[$.

   (b) Analise a convergência do método de Newton para a menor solução da equação e utilize-o para obter uma aproximação com erro inferior a 0.5×10^{-4}.

   Para demonstrar a convergência do método de Newton para a menor raíz temos apenas que verificar as condições no intervalo $]0, 0.5[$. De facto, f é uma função de classe C^2 tal que: **i.** $f(0)f(0.5) < 0$; **ii.** $f'(x) = e^x - 3$ não muda de sinal; **iii.** $f''(x) = e^x$ não muda de sinal. Como adicionalmente temos

$$\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| = 0.25 < 0.5 - 0 \quad , \quad \left|\frac{f'(1)}{f(1)}\right| = 0.25996 < 0.5 - 0,$$

podemos garantir a convergência do método de Newton para a raíz z_1, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 0.5]$. Relativamente ao erro cometido, sabemos que

$$|z_1 - x_n| \leq \frac{1}{K}(K|z - x_0|)^{2^n}, \quad K = \frac{max|f''(x)|}{2min|f'(x)|}$$

No nosso caso, escolhendo $x_0 = 0.25$, garantimos que $|z_1 - x_0| \leq 0.25$. Além disso, $max|f''(x)| = |f''(0.5)| = 1.64872$ e $min|f'(x)| = |f'(0)| = 2$. Assim,

$$|z_1 - x_n| \leq \frac{1}{0.41218}(0.103045)^{2^n}$$

Podemos assim constatar que para o majorante do erro ser inferior a 0.5×10^{-4} basta tomar $n \geq 3$. Utilizando a fórmula recursiva do método de Newton obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.25 \\ x_1 &= 0.269828625097 \\ x_2 &= 0.269978956787 \\ x_3 &= 0.269978965545 \end{aligned}$$

3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_1 x_2) - \frac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

Mostre que o sistema tem uma e uma só solução no conjunto $\Omega = [-1, 1]^3$ *e calcule 2 iterações no método do ponto fixo.*

O sistema pode ser escrito de forma equivalente como o problema de ponto fixo

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}\cos(x_1 x_2) \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1 \\[2ex] x_3 = \dfrac{3 - 10\pi}{60} - \dfrac{e^{-x_1 x_2}}{20} \end{cases} \Leftrightarrow x = G(x)$$

Sendo Ω um conjunto fechado e não vazio de $\mathbb{R}^3$, o teorema do ponto fixo garante existência e unicidade de solução nesse conjunto, desde que G seja contínua, invariante e contractiva em Ω. A continuidade de G é imediata. Relativamente à invariância, basta reconhecer que:

$$\begin{aligned}
|G_1(x)| =& |\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cos(x_1x_2)| \leq \frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{1}{2} < 1\\
|G_2(x)| =& |\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}-0.1| \leq 0.1+\frac{1}{9}\sqrt{1+1+1.06} = 0.294365 < 1\\
|G_3(x)| =& \frac{3-10\pi}{60}-\frac{e^{-x_1x_2}}{20} \leq \frac{10\pi-3}{60}+\frac{e}{20} = 0.609513 < 1
\end{aligned}$$

Vemos deste modo que $G(\Omega) \subseteq [-0.5, 0.5]\times[-0.294365, 0.294365]\times[-0.609513, 0.609513] \subseteq \Omega$,pelo que realmente G é invariante em Ω

Relativamente à contractividade, como G é diferenciável, basta verificar que a norma da matriz Jacobiana é inferior a 1.

$$J_G(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x_2}{3}\sin(x_1x_2) & -\frac{x_1}{3}\sin(x_1x_2) & 0 \\ \frac{x_1}{9\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}} & 0 & \frac{\cos x_3}{18\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}} \\ \frac{x_2e^{-x_1x_2}}{20} & \frac{x_1e^{-x_1x_2}}{20} & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando por exemplo a norma $\|\cdot\|_\infty$ temos,

$$\|J_G(x)\|_\infty \leq \max\left\{2/3, \frac{1}{9\sqrt{0-1+1.06}}+\frac{1}{18\sqrt{0-1+1.06}}, \frac{1}{10}\right\} = 0.680414 < 1$$

Tendo verificado que G é continua, invariante e contractiva no conjunto fechado e não vazio Ω, podemos afirmar que G tem um e um só ponto fixo em Ω, pelo que o sistema inicial tem nesse conjunto uma e uma só solução. As iterações pedidas podem ser as seguintes:

$$\begin{aligned}
x^{(0)} =& (0,0,0)^T\\
x^{(1)} =& G(x^{(0)}) = (0.5, 0.929563, -0.523599)^T\\
x^{(2)} =& G(x^{(1)}) = (0.46464, 0.8, -0.505012)^T
\end{aligned}$$

4. *Mostre que* $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$*, quaisquer que sejam a matriz*$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e o vector* $x \in \mathbb{R}^n$*, para uma qualquer norma em* $\mathbb{R}^n$ *e respectiva norma matricial induzida.*

Começemos por recordar que

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

pelo que , para qualquer vector $x \neq 0$, temos seguramente

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Leftrightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|,$$

pelo que o resultado fica demonstrado para qualquer vector não nulo. Finalmente, como a desigualdade é trivialmente válida para $x = 0$, o resultado é válido para qualquer vector $x \in \mathbb{R}^n$, como se pretendia demonstrar.

5. *Determine uma aproximação do valor próprio dominante da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

usando o método das potências. O teorema de Gershgorin permite concluir que a matriz A é invertível ?

Começemos por calcular algumas iterações do método das potências. Tomando como aproximação inicial do vector próprio associado $v^{(0)} = (1, 1, 1)$, temos sucessivamente

$$v^{(1)} = Av^{(0)} = (4, 4, 9)^T$$

$$v^{(2)} = Av^{(1)} = (31, 26, 76)^T$$

$$v^{(3)} = Av^{(2)} = (259, 204, 634)^T$$

Normalizando temos $v^{(3)} := v^{(3)}/\|v^{(3)}\| = (0.362441, 0.285474, 0.88721)^T$. A aproximação do valor próprio dominante será então

$$\lambda^{(3)} = Av^{(3)} \cdot v^{(3)} = 8.31599$$

Relativamente à segunda parte da questão, observando as colunas da matriz A, o teorema de Gershgorin garante que todos os valores próprios da matriz A estão na reunião dos círculos de Gershgorin

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 0\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 8| \leq 5\}$$

Como nenhum destes círculos inclui a origem, zero não é valor próprio de A, pelo que a matriz é invertível. Assim, neste caso, o teorema de Gershgorin realmente garante a invertibilidade da matriz.

Parte II

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f, de classe C^4.

x	-1	1	2	6
y	-1	2	3	4

   (a) *Determine o polinómio interpolador de f nos pontos tabelados e, assumindo que $f(x) = \exp(-x) + q_3(x)$, onde $q_3(x)$ é um polinómio de grau 3, determine um majorante para o erro de interpolação.*

   Comecemos por determinar o polinómio interpolador através de uma tabela de diferenças divididas:

x_i	$f(x_i)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	
-1	-1			
		3/2		
1	2		$-1/6$	
		1		1/420
2	3		-3/20	
		1/4		
6	4			

   Temos então $p_3(x) = -1 + \frac{3}{2}(x+1) - \frac{1}{6}(x+1)(x-1) + \frac{1}{420}(x+1)(x-1)(x-2)$. Relativamente ao erro de interpolação temos

$$|f(x) - p_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}|(x+1)(x-1)(x-2)(x-6)| \leq \frac{e}{24} \cdot 74.1218 = 8.39517$$

   (b) *Determine um polinómio W, de grau ≤ 3, tal que $x_i = W(y_i), i = 0, 1, 2, 3$ e utilize este polinómio para determinar uma aproximação de uma raíz de f.*

   A determinação de W pode ser feita através de uma tabela de diferenças divididas

$f(x_i)$	x_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	
-1	-1			
		2/3		
2	1		1/12	
		1		17/60
3	2		3/2	
		4		
4	6			

$$W(y) = -1 + \frac{2}{3}(y+1) + \frac{1}{12}(y+1)(y-2) + \frac{17}{60}(y+1)(y-2)(y-3).$$

   Uma aproximação da raíz de f será precisamente $W(0) = \frac{6}{5}$.

(c) *Utilizando os pontos da tabela que considere adequados determine aproximações de $I(f) = \int_{-1}^{3} f(x)\, dx$ utilizando o método dos trapézios e de Simpson.*

Em primeiro lugar devemos ter em atenção que os pontos tabelados não são igualmente espaçados, pelo que as fórmulas dos métodos dos trapézios e de Simpson poderão ter que ser adaptadas a este caso concreto.

Método dos trapézios: podemos aplicar o método simples a cada subintervalo

$$I(f) \approx \frac{2}{2}(-1+2) + \frac{2-1}{2}(2+3) + \frac{6-2}{2}(3+4) = 17.5$$

Método de Simson: podemos escolher os pontos -1,2,6 e aproximar o integral pretendido pelo integral do polinómio interpolador de grau 2 nestes pontos.

$$I(f) \approx \int_{-1}^{6} -\frac{13x^2}{84} + \frac{125x}{84} + \frac{9}{14}\, dx = 19.3472$$

(d) *Determine o valor de* $\min_{a,b} \sum_{i=0}^{3} (y_i - ax_i + b)^2$.

O valor do mínimo é precisamente o valor do erro quadrático obtido com a melhor aproximação dos mínimos quadrados. Resolvendo o sistema normal associado à aproximação por polinómios de grau 1, obtemos $a = 0.653846$, $b = -0.692308$. Deste modo o mínimo será

$$\sum_{i=0}^{3} (y_i - 0.653846x_i - 0.692308)^2 = 2.88462$$

2. *Mostre se f é uma função de classe C^{n+1} tal que $f^{(n+1)}([a,b]) \subseteq [a,b])$. Então o erro de interpolação verifica a relação $|f(x) - p_n(x)| \leq \max\{|a|,|b|\}e^{b-a}$.*

   Observemos em primeiro lugar que:

$$f^{(n+1)}([a,b]) \subseteq [a,b] \Rightarrow a < f^{(n+1)}(x) < b \Rightarrow |f^{(n+1)}(x)| \leq max\{|a|,|b|\}$$

   e

$$\frac{|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!} \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(b-a)^k}{k!} = e^{b-a}$$

   Assim, usando a fórmula para o erro de interpolação temos:

$$|f(x) - p_n(x)| = |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!} \leq \max\{|b|,|a|\} \cdot e^{b-a}$$

3. ~~Determine uma fórmula de quadratura da forma $Q(f) = 2f(x_0) + Af(x_1)$ que seja exacta para polinómios de grau 2 no intervalo $[0,1]$. Utilize essa fórmula para obter uma fórmula composta para calcular integrais num intervalo genérico $[a,b]$.~~

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(xy(x)), & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) *Mostre que este problema tem uma e uma só solução* $y \in C^\infty(]0,1[)$.

Este problema de valor inicial é do tipo $y' = f(x,y)$, com $f(x,y) = \sin(xy)$. A função $f(x,y)$ é contínua relativamente à primeira variável e, sendo diferenciável, é Lipschitziana relativamente a y. O teorema de Picard garante deste modo que existe uma e uma só função $y(x)$, de classe C^1 que verifica as condições propostas. Usando agora a equação diferencial e a diferenciabilidade de $f(x,y)$ podemos facilmente calcular derivadas de qualquer ordem de y , pelo que a função será na verdade de classe C^∞.

(b) *Aplique o método de Euler com* $h = 0.1$ *para calcular uma aproximação de* $y(0.2)$ *e determine um majorante para o erro cometido.*

$$\begin{aligned} y(0.1) \approx y_1 =& y_0 + 0.1\sin(t_0 y_0) = 1 + 0.1\sin(0 \times 1) = 1 \\ y(0.2) \approx y_2 =& y_1 + 0.1\sin(t_1 y_1) = 1.00998 \end{aligned}$$

Para determinar um majorante do erro devemos primeiro obter, no intervalo $[0\ ,\ 0.2]$,

$$M = \max|y''(x)| = \max|y\cos(xy) + x\sin(xy)\cos(xy)| \leq \max|y+1|$$

como $y(0) = 1$ e no intervalo em causa a derivada é positiva e inferior a 1, podemos ver que $y < 1.2$, pelo que $M \leq 2.2$.

Além disso também devemos obter

$$L = \max_y \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_y |x\cos(xy)| \leq 0.2$$

Finalmente,

$$|y(0.2) - y_2| \leq \frac{M0.1}{2L}(e^{L(0.2-0)} - 1) = 0.0224459$$

(c) *Determine uma nova aproximação de* $y(0.2)$ *usando desta vez um método de Runge-Kutta de ordem 2.*

$$\begin{aligned} y_1 =& y_0 + 0.05\sin(0 \times 1) + 0.05\sin(0.1 \times (1 + 0.1\sin(0 \times 1)) = 1.00499 \\ y_2 =& y_1 + 0.05\sin(0.1 \times y_1) + 0.05\sin(0.2 \times (y_1 + 0.1\sin(0.1 \times y_1)) = 1.02009. \end{aligned}$$

Nesse caso, $y(0.2) \approx 1.02009$.