Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA

Avaliação Contínua - Teste 1 11/04/2013

1. Suponha que pretende calcular valores da função $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, usando o algoritmo: $z_1 = \sqrt{x+1}$; $z_2 = \sqrt{x}$; $z_3 = z_1 - z_2$. **i.** Calcule o valor de $f(200)$ usando um sistema de vírgula flutuante com 3 dígitos na mantissa e estime o erro relativo cometido. **ii.** Mostre que o algoritmo é instável para valores elevados de x. [**1.25 val**]

2. Considere a equação polinomial $x^3 + 40x - 80 = 0$.

   (a) Mostre que esta equação tem uma e uma só solução em $\mathbb{R}$ e indique um método de ponto fixo garantidamente convergente para a solução. Calcule três iterações do método proposto e apresente um majorante do erro cometido. [**1.75 val**]

   (b) Utilizando agora o método de Newton, obtenha uma aproximação da solução com erro inferior a 0.5×10^{-5}. [**1.25 val**]

3. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$, em que $b, x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} n, & i \neq j \\ 1/i, & i = j \end{cases}$$

   (a) Mostre que o sistema tem uma e uma só solução e que o método de Jacobi é convergente, independentemente da aproximação inicial. Considere agora $n = 2$, $x^{(0)} = (0,0)^T$, $b = (1,1)^T$ e, utilizando o método de Jacobi, obtenha uma solução do sistema com erro inferior 0.5×10^{-1}. [**1.5 val**]

   (b) Considere $n = 3$ e, realizando 2 iterações do método das potências, obtenha uma aproximação do valor próprio dominante. [**1.0 val**]

   (c) Considere $n = 3$, $b = (0,1,0)^T$. Obtenha a factorização de Doolittle da matriz A e utilize-a para resolver o sistema. Admitindo que $\|A\|_\infty^{-1} = 84/146$ e que $Ay = (0.1, 1, 0)^T$, indique um majorante para $\|x - y\|_\infty$. [**1.75 val**]

4. O problema da determinação de valores e vectores próprios (reais) de uma matriz de ordem n, $Ax - \lambda x = 0$, é equivalente à determinação das soluções da equação $f(z) = 0$ que que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é definida por

$$f : \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ xx^T - 1 \end{pmatrix}$$

Descreva a aplicação dos métodos de Newton e do ponto fixo à resolução deste sistema. **[1.5 val]**