Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em Época Especial 03/09/2014

1. Considere a equação $\cos(x^2) - 4x = 0$.

   (a) Mostre que a equação tem uma única solução $z \in \mathbb{R}$ e que essa solução se encontra no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

   (b) Utilizando o método de Newton, apresente uma sucessão garantidamente convergente para z e obtenha uma aproximação da solução com dois algarismos significativos.

2. Considere o sistema linear $Ax_\varepsilon = b_\varepsilon$, dado por

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\varepsilon,1} \\ x_{\varepsilon,2} \\ x_{\varepsilon,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

   Mostre que o método de Jacobi aplicado à resolução deste sistema é convergente e, tomando $\varepsilon = 1/100$, calcule três iterações deste método. Determine ainda um majorante para $\|\boldsymbol{x}^{(3)}_{1/100} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty$. (Obs: $\|A^{-1}\|_\infty = 1$)

3. Suponha que dispõe da seguinte tabela de valores de uma função $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, suficientemente regular, e tal que $\sup_{0\leq x\leq 4} |f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad n \geq 2$.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0.00	1.50	2.50	3.00	2.75

   (a) Determine a melhor aproximação de f, no sentido dos mínimos quadrados, por funções da forma $g(x) = \alpha + \beta \sin x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Utilizando o polinómio interpolador de f em todos os pontos da tabela, determine um valor aproximado de $f(4/3)$, assim como um majorante do erro cometido.

   (c) Obtenha aproximações de $\int_0^4 f(x)\,dx$ utilizando o método dos trapézios e de Simpson compostos, indicando em cada caso um majorante do erro de integração.

4. Considere o problema de valor inicial $y' = \dfrac{1}{1+y^4}, \quad y(0) = 0$. Determine um valor aproximado de $y(1)$ utilizando o método de Euler com $h = 0.2$ e estime o erro cometido.

5. Seja $p_n(x)$ o polinómio interpolador de $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ nos pontos igualmente espaçados $a = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$. Mostre que se existirem constantes positivas c, M tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n$ então $\lim \|f - p_n\|_\infty = 0$.