Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA
Exame de Época Especial 09/09/2011

1. Considere a equação $x^2 + \frac{1}{2}\sin x - 1 = 0$.
   (a) Mostre que a equação tem uma única solução z no intervalo $I = [0, \pi/2]$ e que a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin x_n}$ converge para z, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in I$. **[2.0 val]**
   (b) Mostre que a convergência da sucessão definida na alínea anterior é apenas linear. **[1.0 val]**
   (c) Considerando a aplicação do método de Newton à resolução do mesmo problema, indique um intervalo onde possa garantir a convergência do método, independentemente da condição inicial x_0. Calcule 3 iterações do método de Newton e determine um majorante para o erro cometido. **[2.0 val]**

2. Mostre que se $\lambda_{max} \in \mathbb{R}$ for valor o próprio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de maior módulo, então qualquer norma matricial de A verifica $\|A\| \geq |\lambda_{max}|$. **[1.0 val]**

3. Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que o método de Jacobi é convergente no caso deste sistema e calcule 3 iterações. Sem resolver o sistema, forneça um majorante para o erro cometido e indique um número de iterações para o qual possa garantir que o erro, medido numa norma à sua escolha, seja inferior a 0.5×10^{-6}. **[2.0 val]**
   (b) Mostre que a matriz de sistema admite uma factorização de Cholesky e determine-a. **[2.0 val]**

4. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

x_i	0	1	2	3
f_i	-1	-3	3	53

   (a) Determine um polinómio de grau ≤ 3 que interpole f nos pontos da tabela e justifique que é o único nestas condições. Determine ainda uma aproximação de $f(3/2)$. **[2.0 val]**
   (b) Sabendo que $|f(x)| \leq 24, \forall x \in \mathbb{R}$, determine um majorante para o erro de interpolação cometido na alínea anterior.**[1.0 val]**
   (c) Determine o polinómio de grau ≤ 1 que melhor aproxima f no intervalo $[0, 3]$, no sentido dos mínimos quadrados. **[1.5 val]**
   (d) Utilizando o método dos trapézios com todos os pontos da tabela, determine um valor aproximado de $\int_0^3 f(x)\,dx$. **[1.5 val]**

5. Seja a equação diferencial $y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 0$.
   (a) Usando o método de Euler com passo $h = 0.25$, determine uma aproximação de $y(1.0)$. **[2.0 val]**
   (b) Admitindo que $|y''(x)| \leq 3$, determine o valor de h a utilizar de modo ao erro no cálculo de $y(1.0)$ ser inferior a 0.5×10^{-6}. **[2.0 val]**