1. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da forma

$$f(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + c_3\Phi_3(x),$$

com $\Phi_1(x) = 1, \Phi_2(x) = \cos(\pi x)$ e $\Phi_3(x) = \sin(\pi x)$. Sabendo que f interpola os dados $(0, 2), (1/2, 1/2), (1, 0)$, escreva o sistema linear que permite calcular os coeficientes c_1, c_2, c_3 e resolva-o usando o método de Crout.

2. Considere a regra de quadratura $Q(f) = A(f(x_1) + f(x_2))$, para o cálculo de integrais da forma $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, f(x)\, dx$. Calcule o peso A e os nós de quadratura x_1, x_2 de modo que o grau da fórmula seja o maior possível e determine-o.

3. Considere o método iterativo

$$x_{k+1} = (\alpha + 1)x_k - x_k^2, \quad k = 0, 1, \cdots,$$

onde $\alpha \in [1/2, 1]$ é um parâmetro dado.

   (a) Prove que o método converge, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [\alpha - 1/5, \alpha + 1/5]$. Proponha uma equação não linear que tenha uma solução $z = \lim x_k$.

   (b) Assumindo que o método converge, determine os valores de α para os quais a convergência é quadrática.

4. Seja $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ uma matriz cujas entradas são dadas por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & , i > j \\ 1 & , i = j \\ -1 & , i < j \end{cases}.$$

   (a) Determine $cond_1(A)$ e $cond_\infty(A)$. Caso não consiga determinar estes números, indique minorantes para os mesmos.

   (b) Sabendo $Ax = b$, $\tilde{A} = A + \varepsilon diag(1, \cdots, 1)$, e que $\tilde{A}\tilde{x} = b$, determine um majorante para $\|\tilde{x} - x\|/\|x\|$.

5. Transforme a equação diferencial ordinária

$$y''' + xy'' - yy' + y^2 = \cos x$$

num sistema de EDOs de ordem 1, escrevendo detalhadamente para este caso os métodos de Euler progressivo e regressivo. Efectue 3 iterações do método de Euler progressivo com $h = 0.5$, usando as condições iniciais $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1$.