Análise Numérica

Licenciatura em MAEG

Época de Recurso, 24/06/2015

1. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 2x - 1}{x^2}$. Mostre que o algoritmo

$$z_1 = (x+1)^2, \quad z_2 = z_1 - 2x - 1, \quad z_3 = z_2/x^2$$

é numericamente instável quando utilizado no cálculo de valores de f para x próximo de zero.

2. Considere a equação $x^2 + 10\cos x = 0$.

(a) Mostre que a equação tem uma única solução z no intervalo $[3, 3.2]$. Construa uma sucessão garantidamente convergente para z e utilize-a para determinar uma aproximação com erro inferior a 0.5×10^{-3}.

(b) A equação tem outra solução $z_2 \approx 2$. Escolha um intervalo em que o método de Newton seja convergente para z_2 e utilize-o para obter uma aproximação de z_2 com 4 casas decimais correctas.

3. Considere a matriz $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3+\varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & -2+\varepsilon & 1 \\ 1 & 0 & 6+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$

(a) Utilizando o teorema de Gershgorin mostre que a matriz A_0 é invertível. Para que valores de ε o teorema de Gershgorin garante a invertibilidade de A_ε?

(b) Efectue 2 iterações do método das potências para obter uma aproximação do valor próprio de maior módulo. Comente os resultados.

(c) Obtenha uma factorização triangular $A_0 = L_0 U_0$.

(d) Considerando $b_\varepsilon = [1\ 0\ \varepsilon]^T$ e designando por x_ε a solução do sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, determine um majorante para $\|x_{1/10} - x_0\|_\infty$. (obs: $\|A_0\|_\infty^{-1} = 7$)

4. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^\infty[0,1]$ que verifica $\|f^{(n)}\|_\infty \leq 2n^2$.

x	0	1/4	1/2	3/4	1
$f(x)$	0	1/2	1	1/3	1

(a) Determine o polinómio $p(x)$ que interpola f nos pontos da tabela, utilize-o para estimar o valor de $f(1/3)$ e obtenha um majorante para o erro cometido.

(b) Determine a melhor aproximação dos dados, no sentido dos mínimos quadrados, por funções do tipo $g(x) = \alpha x + \beta x^3$.

(c) Utilize o método de Romberg para obter uma aproximação de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(d) Comente a seguinte afirmação: *"Se utilizassemos a regra de Simpson composta para aproximar o mesmo integral, o erro seria menor."*

5. Considere o problema de valores iniciais

$$y'(t) = t\exp\{-y(t)\}, \quad y(0) = 0.$$

(a) Utilize o método de Euler progressivo com $h = 0.2$ para determinar uma aproximação de $y(1)$ e estime o erro cometido.

(b) Deduza o método de Taylor de ordem 2 para este problema de valor inicial e obtenha uma aproximação de $y(1)$ com $h = 0.5$.

Cotação: **1**. 1.5 **2**.(a) 2.0 (b) 2.0 **3**. (a) 1.5 (b) 1.5 (c) 1.5 (d) 1.5 **4**. (a) 1.5 (b) 1.5 (c) 1.5 (d) 1.0 **5**. (a) 1.5 (b) 1.5