Universidade Técnica de Lisboa - Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Análise Numérica

Prova para Dispensa de Exame Final [data]

Parte I

1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + y + \varepsilon \cos z & = -1 \\ x + 3y - 3\varepsilon xz & = 0 \\ \varepsilon x^2 + y + 3z & = 0 \end{cases}$$

a) No caso $\varepsilon = 0$, resolva o sistema linear resultante, utilizando explicitamente uma factorização $A = LU$ (L, matriz triangular inferior com 1's na diagonal e U matriz triangulat superior). Sem determinar a inversa da matriz do sistema, estime a valor do número de condição $cond_\infty(A)$.

b) Mostre que se C é uma matriz invertível de dimensão $(n \times n)$ então $cond_\infty(C) \geq 1$.Explique a importância da determininação do número de condição de uma matriz.

c) Admitindo agora que $\varepsilon = 1$ e partindo do vector nulo como aproximação inicial, escreva o sistema linear que lhe permite calcular a primeira iteração do método de Newton.

d) Usando a factorização de Cholesky, calcule a primeira iteração do método de Newton referida na alínea anterior.

2. Considere a equação $\sin x + 1 - ax$, onde a é um parâmetro real conhecido.

a) Diga justificando para que valores de a a equação tem um única raiz no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Para os valores de a considerados na alínea anterior, mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = \dfrac{1 + \sin x}{a}$ converge para a raiz considerada.

c) No caso $a = 2$, qual o número mínimo de iterações do método do ponto fixo que deverá ser efectuado de modo a garantir que o erro absoluto é inferior a 10^{-3} ?

Parte II

1. Considere uma função f, suficientemente regular, cujos valores são conhecidos nos pontos da tabela seguinte:

x_i	0	1	2
f_i	1	1	2

a) Usando um polinómio interpolador de grau 1 (não necessariamente em todos os pontos da tabela) determine uma aproximação de $f(1.5)$.

b) Repita a alínea anterior, usando desta vez um polinómio interpolador de grau 2.

c) Sabendo que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine uma expressão para o erro cometido na alínea anterior.

2. Prtende-se aproximar o integral $I(f) = \int_{-1}{}^{3} f(x)\,dx$ através de uma regra de quadratura.

a) Obtenha uma fórmula de quadratura do tipo $Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)$, que seja pelo menos de grau 2. Usando a fórmula obtida, calcule uma aproximação de $I(x)$.

b) Calcule outra aproximação de $I(x)$, usando agora a regra de Simpson com $h = 2$.

c) Compare as duas aproximação já obtidas com o valor exacto do integral e comente os resultados.

3. Considere o Problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x - 4\,y(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ \text{y(0)=1} \end{cases}$$

a) Obtenha um valor aproximado de $y(0.2)$, usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

b) Recorrendo a um resultado teórico, determine um majorante para o erro $|y(0.2) - y_2|$.

c) Usando o mesmo valor de h, determine uma oytra aproximação de $y(0.2)$, através do método de Runge-Kutta de 2ª ordem. Sabendo que $y(2/10) = -\frac{11}{80} + \frac{}{1}9e4/516$, determine o erro cometido.

d) Comente a diferença de resultados obtidos através dos dois métodos.