LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Análise Numérica

Licenciatura em MAEG

Teste Intercalar, 05/04/2016

Tópicos de Resolução

1. *Considere a equação* $e^{-x^2} - 2x = 0$.

(a) *Mostre que a equação tem uma única solução em* $\mathbb{R}$*, que pertence ao intervalo* $[0, \frac{1}{2}]$.
A função $f(x) = e^{-x^2} - 2x$ é estritamente positiva quando $x \leq 0$, pelo que qualquer solução terá que ser positiva. Por outro lado, como $f'(x) = -2xe^{-x^2} - 2$ é negativa para $x > 0$, existirá no máximo uma solução no intervalo $]0, +\infty[$. Finalmente, como $f(0) \times f(\frac{1}{2}) < 0$, existe pelo menos uma solução $z \in [0, \frac{1}{2}]$, que será, pelo que vimos antes, a única raiz de f em $\mathbb{R}$.

(b) *Utilize o método de Newton para obter uma aproximação da solução com erro inferior a* 0.5×10^{-4}. Comecemos por verificar as condições suficientes de convergência do método de Newton, quando aplicado à determinação da raíz de f no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$:

i. f é contínua em $[0, \frac{1}{2}]$ e de classe C^2 em $]0, \frac{1}{2}[$. ✓
ii. $f(0) \times f(\frac{1}{2}) < 0$. ✓
iii. $f'(x) = -2xe^{-x^2} - 2 < 0, \quad x \in]0, \frac{1}{2}[$.
iv. $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} < 0, \quad x \in]0, \frac{1}{2}[$.
v. Como além disso temos que

$$\frac{|f(0)|}{|f'(0)|} = \frac{1}{2} \leq (\frac{1}{2} - 0), \qquad \frac{|f(1/2)|}{|f'(1/2)|} \approx 0.08 \leq (\frac{1}{2} - 0),$$

podemos escolher qualquer $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$.

Garantida a convergência, a tabela seguinte apresenta os vários termos da sucessão

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{4} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{(2x_n^2 + 1)e^{-x_n^2}}{2x_n e^{-x_n^2} + 2} \end{cases},$$

assim como as respectivas estimativas de erro, obtidas a partir de

$$|z - x_n| \leq \frac{\max_{[0,\frac{1}{2}]} |f''(x)|}{2f'(x_n)} |z - x_{n-1}|^2 = \frac{|z - x_{n-1}|^2}{f'(x_n)}$$

i	x_i	Maj. Erro
0	0.25	0.25
1	.42792	0.253067×10^{-1}
2	0.419379	0.23609×10^{-3}
3	0.419635	0.206173×10^{-7}

A aproximação $x_3 = 0.419635$ está portando nas condições propostas.

2. *Considere o sistema de equações*

$$\begin{cases} 2x - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \\ \\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 3y = 0 \end{cases}.$$

(a) *Mostre que o sistema tem uma e uma só solução $\boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}^2$ e construa uma sucessão $X^{(n)}$ convergente para essa solução.* Comecemos por escrever o sistema na forma equivalente

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \\ y = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases}.$$

Vemos imediatamente que qualquer solução (z_1, z_2) do sistema verifica

$$|z_1| = \left|\frac{1}{2}\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$$

e

$$|z_2| = \left|-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{3}.$$

Assim, qualquer solução do sistema estará no conjunto $\Omega = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Vejamos então que as condições do teorema do ponto fixo são verificadas para a função $G(x,y) = (\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right), -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right))$, no conjunto Ω:

i. G é contínua em Ω e $G(\Omega) \subset \Omega$. A continuidade é imediata e a invariância é consequência das observações anteriores, que permitem concluir que $G(\mathbb{R}^2) \subset \Omega$, pelo que também se tem $G(\Omega) \subset \Omega$.

ii. G é contractiva em Ω. Como G é diferenciável, ela será contractiva, por exemplo na norma $\|\cdot\|_\infty$, se $\max\limits_{\Omega} \|J_G(x,y)\|_\infty < 1$. Ora,

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) & \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \\ \frac{1}{6}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) & -\frac{1}{6}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{pmatrix}$$

pelo que,

$$\begin{aligned}\|J_G(x,y)\|_\infty =& \max\left\{\left|\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + \left|\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|,\right.\\ &\left.\left|\frac{1}{6}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| + \left|-\frac{1}{6}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\right\} \leq \max\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}\\ =&\frac{1}{2} < 1\end{aligned}$$

Nestas condições o teorema do pontto fixo garante que existe uma e uma só solução do sistema em Ω e, devido às considerações iniciais, uma única solução em $\mathbb{R}^2$.

(b) *Especifique quantas iterações teria que calcular para que* $\|\boldsymbol{X}^{(n)} - \boldsymbol{Z}\|_\infty < 0.5 \times 10^{-6}$.

Tendo sido verificadas as condições do teorema do ponto fixo, a sucessão construida pelo método do ponto fixo com $X^{(0)} \in \Omega$ converge para a solução do sistema $Z \in \Omega$. Além disso é verificada a estimativa de erro *a priori*

$$\|X^{(n)} - Z\|_\infty \leq (1/2)^n \|X^{(0)} - Z\|_\infty \leq (1/2)^n.$$

Assim, para que $\|X^{(n)} - Z\|_\infty < 0.6 \times 10^{-6}$ basta exigir que $(1/2)^n < 0.5 \times 10^{-6}$, ou seja, que $n \geq 20.9316$. Devemos por isso calcular 21 iterações do método do ponto fixo para atingir a precisão requerida.

3. Considere o sistema linear $A_\varepsilon x = b$ em que

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 8 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Obtenha a decomposição de Cholesky de A_1 e utilize-a para resolver o sistema $A_1 x = b$.* É imediato verificar que a matrizn A_1 é simétrica e definida positiva, pelo que é possível determinar a factorização pedida.

$$l_{11} = \sqrt{a_{11} - \sum_{r=1}^{0} l_{1r}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$l_{21} = \left(a_{21} - \sum_{r=1}^{0} l_{2r} l_{1r}\right) / l_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{r=1}^{1} l_{2r}^2} = \sqrt{2 - (\sqrt{2}/2)^2} = \sqrt{3/2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Assim, a factorização pedida é

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 \end{pmatrix}$$

Relativamente à resolução do sistema linear, começamos por resolver o sistema $Ly = b$, obtendo depois a solução do sistema inicial como solução de $L^T x = y$. Concretamente,

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}y_1 = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{6}}{12} \end{cases}$$

$$L^T x = y \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{12} \end{cases} \Leftrightarrow t \begin{cases} x_1 = \frac{1}{6} \\ x_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

(b) *Tomando agora $\varepsilon = 0$, aplique o método de Jacobi de modo a obter uma aproximação da solução com erro (medido na norma $\|\cdot\|_\infty$), inferior a 10^{-3}.*

Uma vez que a matriz de sistema é de diagonal estritamente dominante por linhas temos a garantia de convergência do método de Jacobi. Além disso, tomando $L = \|-D^{-1}(L+U)\|_\infty$ dispomos da seguinte estimativa de erro *a posteriori*:

$$\|z - x^{(n)}\|_\infty \leq \frac{L}{1-L}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty, \quad n \geq 1.$$

Neste caso, como $L = \frac{1}{2}$, temos que $\|x - x^{(n)}\|_\infty \leq \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty$. A sucessão de aproximações fornecidas pelo método de Jacobi é dada por:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^2 \\ x^{(n)} = D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x^{(n-1)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

A tabela seguinte contém as sucessivas iterações do método de Jacobi e respectivos majorantes do erro.

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_\infty$
0	1/8	−0	-
1	1/8	−1/16	0.625×10^{-1}
2	17/128	−1/16	0.78125×10^{-2}
3	17/128	−17/256	0.390625×10^{-2}
4	273/2048	−17/256	0.488281×10^{-3}

Consideramos pois a aproximação

$$x^{(4)} = (\frac{274}{2018}, -\frac{17}{256}) \approx (0.133301, -0.0664063).$$

(c) *Sendo $\lambda_1 > \lambda_2$ os valores próprios de A_0 mostre, sem calcular os valores próprios, que $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| \leq \frac{3}{7}$. Realize 3 iterações do método das potências para determinar uma aproximação de λ_1.*

O teorema de Gershgorin garante que todos os valores próprios de A_0 estão contidos na reunião dos conjuntos:

$$B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 8| \leq 1\}$$

$$B_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\}$$

Além disso, como esta reunião tem duas componentes conexas, o mesmo teorema garante ainda que em cada um dos conjuntos indicados existe exactamente um valor próprio de A_0. Concretamente, sabemos que $\lambda_1 \in B_1$ e $\lambda_2 \in B_2$, pelo que $|\lambda_1| \geq 7$ e $|\lambda_2| \leq 3$. Assim,

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \leq \frac{3}{7}.$$

Para calcular 3 iterações do método das potências basta escolher uma aproximação $v^{(0)}$ do vector próprio dominante e calcular $v^{(3)} = A^3 v^{(0)}$. No nosso caso, escolhendo $v^{(0)} = (1, 0)$ obtemos $v^{(3)} = (580, 85)$. A aproximação do valor próprio dominante pode agora ser obtida como

$$\lambda^{(3)} = \frac{\langle A v^{(3)}, v^{(3)} \rangle}{\|v^{(3)}\|_2^2} = 8.16226.$$

Cotação: **1**. (a) 1.0 (b) 4.0 **2**.(a) 4.0 (b) 2.0 **3**. (a) 3.0 (b) 3.0 (c) 3.0