Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em Época Normal 03/06/2014

Tópicos de Resolução
Parte I

1. it Considere a equação $\cos(x^2) - 2x = 0$.

   (a) *Mostre que a equação tem uma única solução $z \in \mathbb{R}$ e que essa solução se encontra no intervalo* $[0, \frac{1}{2}]$.

   Comecemos por notar que, como a equação é equivalente a $x = \cos(x^2)/2$, qualquer solução está necessariamente no intervalo $[-1/2, 1/2]$. Como além disso no intervalo $[-1/2, 0]$ se tem $x < 0$ mas $cos(x^2)/2 > 0$, apenas pode existir solução no conjunto $[0, 1/2]$. Como f é diferenciável e $f'(x) = (\cos(x^2) - 2x)' = -2x\sin(x^2) - 2 < 0$ em $[0, 1/2]$ a função f é crescente pelo que a equação terá no máximo uma raiz. Finalmente, como f é contínua e $f(0) \cdot f(1/2) < 0$, f terá pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1/2]$. Por tudo isto podemos concluir que f tem uma única raiz em $\mathbb{R}$ e que a mesma pertence ao intervalo $[0, 1/2]$.

   (b) *Utilizando o método de Newton, apresente uma sucessão garantidamente convergente para z e obtenha uma aproximação da solução com dois algarismos significativos.*

   Na alínea anterior já mencionámos que f é diferenciável, $f(0) \cdot f(1/2) < 0$ e que $f'(x) < 0$. Como além disso $f''(x) = -2(1 - (1 + 2x^2)\cos(x^2)) \leq 0$, $|f(0)/f'(0)| = 1/2 \leq (1/2 - 0)$ e $|f(1/2)/f'(1/2)| = 0.0138327 \leq (1/2 - 0)$, estão verificadas as condições de convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1/2]$. Relativamente à estimativa de erro, escolhendo $x_0 = 1/4$ e uma vez que

   $$K = \frac{\max|f''(x)|}{2\min|f'(x)|} = \frac{|f''(1/2)}{2f'(0)} \approx 0.36593,$$

   teremos

$$|z - x_n| \le \frac{1}{K}(Ke_0)^{2^n} \le 2.73276(0.0914825)^{2^n}.$$

Uma vez que para $n = 2$ se tem $|z - x_2| \le 0.19105 \times 10^{-3}$, x_2 essa aproximação já terá 3 algarismos significativos. Concretamente, a sucessão escolhida para aproximar a solução é

$$\begin{cases} x_0 = 1/4 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{x_n^2 \sin x_n^2 + \frac{1}{2}\cos x_n^2}{x_n \sin x_n^2 + 1} \end{cases}$$

$$x_0 = 0.250000; \quad x_1 = 0.495195; \quad x_2 = 0.486132.$$

2. *Considere o sistema de equações dado por*

$$x = 1 + \frac{h\, e^{-x^2}}{1+y^2}, \quad y = \frac{1}{2} + h \arctan(x^2 + y^2),$$

em que $h > 0$ é um parâmetro real.

(a) *Mostre que, se h for suficientemente pequeno, existe uma e uma só solução do sistema no conjunto $D_h = [1, 1+h] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{h\pi}{2}]$.*

Verifiquemos se as condições do teorema do ponto fixo de Banach são válidas no conjunto considerado. A função $G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e portanto também em D_h. Além disso,

i. Como $0 < \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} \le 1$ teremos $1 < G_1(x, y) \le 1 + h$, e como $0 \le \arctan(x^2 + y^2) < \frac{\pi}{2}$ tem-se $\frac{1}{2} \le G_2(x, y) < \frac{1}{2} + \frac{h\pi}{2}$. daqui resulta a invariância de G em D_h.

ii. A matriz jacobiana de G é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{-2xhe^{-x^2}}{1+y^2} & \frac{-2y}{(1+y^2)^2} he^{-x^2} \\ \\ \frac{2hx}{1+(x^2+y^2)^2} & \frac{2hy}{1+(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Observando que o fator h aparece em todas as entradas da matriz, sempre multiplicado por funções limitadas, rapidamente vemos que a norma desta matriz se pode fazer tão pequena quanto quisermos à custa de diminuir h. Em particular, para h suficientemente pequeno, G é contrativa em D_h.

Verificadas as hipótese do teorema do ponto fixo, concluímos que o sistema tem uma e uma só solução no conjunto indicado.

(b) *Tomando $h = 1/10$, efectue duas iterações do método do ponto fixo e estime o erro cometido.*

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (1., 0.5), \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = (1.02943, 0.589606), \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = (1.02572, 0.595303)$$

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}^{(2)}\|_\infty \leq \frac{L^2}{1-L}\|\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)}\|_\infty \leq \frac{0.252^2}{1-0.252} \times 0.00569698 = 4.83665 \times 10^{-4}.$$

3. *Considere o sistema linear $Ax = b$,*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Mostre que o método de Jacobi aplicado à resolução deste sistema permite obter uma sucessão convergente para a respectiva solução. Calcule três iterações do método de Jacobi e estime o erro cometido. (*SUGESTÃO*: A norma matricial associada à norma euclideana é definida, no caso de matrizes simétricas, como $\|M\|_2 = \max |\lambda_i|$ em que λ_i é valor próprio de M)*

Para garantir a convergência do método é suficiente identificar uma norma para a qual se tenha $\|-D^{-1}(L+U)\|$. Seguindo a sugestão, e uma vez que a matriz não é de diagonal estritamente dominante por linhas ou colunas, podemos verificar que $\|-D^{-1}(L+U)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, o que mostra a convergência do método de Jacobi.

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = D^{-1}b - D^{-1}(L+U)\boldsymbol{x}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = (-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}), \quad \boldsymbol{x}^{(3)} = (-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$$

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}^{(3)}\|_2 \leq \frac{\|C\|_2^3}{1 - \|C\|_2}\|\boldsymbol{x}^{(3)} - \boldsymbol{x}^{(2)}\|_2 = \frac{(1/\sqrt{2})^2}{1-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{8} = 0.1848$$

Parte II

1. *Suponha que dispõe da seguinte tabela de valores de uma função* $f : [0,4] \to \mathbb{R}$*, suficientemente regular, e tal que* $\sup_{0 \le x \le 4} |f^{(n)}(x)| \le 1, \quad n \ge 2.$

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0.00	1.84	2.91	3.14	3.24

   (a) *Determine a melhor aproximação de* f*, no sentido dos mínimos quadrados, por funções da forma* $g(x) = \alpha + \beta \sin x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   O sistema normal é dado por

$$\begin{pmatrix} <\phi_0, \phi_0> & <\phi_0, \phi_1> \\ <\phi_1, \phi_0> & <\phi_1, \phi_1> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <f, \phi_0> \\ <f, \phi_1> \end{pmatrix}$$

   onde $\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = \sin x$ e

$$<\phi_0, \phi_0> = \sum_{i=0}^{4} 1 \cdot 1 = 5$$

$$<\phi_0, \phi_1> = \sum_{i=0}^{4} 1 \cdot \sin x_i = 1.13509$$

$$<\phi_1, \phi_1> = \sum_{i=0}^{4} 1 \cdot \sin^2 x_i = 2.12756$$

$$<f\phi_0> = \sum_{i=0}^{4} 1 \cdot f_i = 11.13$$

$$<f\phi_1> = \sum_{i=0}^{4} 1 \cdot f_i \sin x_i = 2.18544$$

   A resolução do sistema permite obter a aproximação pretendida, dada por $g(x) = 2.26743 - 0.182505 \sin x$.

   (b) Utilizando o polinómio interpolador de f em todos os pontos da tabela, determine um valor aproximado de $f(5/2)$, assim como um majorante do erro cometido.

x_i	y_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0.00	0.00				
		1.84			
1.00	1.84		-0.385		
		1.07		-0.011667	
2.00	2.91		-0.42		0.0325
		0.23		0.118333	
3.00	3.14		-0.065		
		0.1			
4.00	3.24				

$$
\begin{aligned}
p_4(x) =& 0.00 + 1.84x - 0.385x(x-1) - 0.011667x(x-1)(x-2) \\
&+ 0.0325x(x-1)(x-2)(x-3)
\end{aligned}
$$

$$f(5/2) \approx p_4(5/2) = 3.10391$$

$$|f(5/2) - p_4(5/2)| = \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!}\left|\frac{5}{2}(\frac{5}{2}-1)(\frac{5}{2}-2)(\frac{5}{2}-3)(\frac{5}{2}-4)\right| \leq 0.0117188$$

2. *Suponha que pretende determinar uma aproximação do integral*

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^M f(x)\,dx + \int_M^{+\infty} f(x)\,dx,$$

usando uma fórmula de quadratura que consiste em aplicar o método de Simpson composto, com n subintervalos, ao integral $\int_0^M f(x)\,dx$. Obtenha uma aproximação de I e o respectivo majorante do erro cometido quando $f(x) = e^{-x^2}, M = 5, n = 4$. Indique, também para a função $f(x) = e^{-x^2}$, como determinaria uma aproximação de I com oito algarismos significativos.

$$Q = \frac{5/4}{3}\left(f(0) + 4f(5/4) + 2f(5/2) + 4f(15/4) + f(5)\right) = 0.767629$$

$$|Q - I| = \frac{4(5/4)^5}{180}|f^{(4)}(\xi)| \leq 0.813802$$

Para determinar o valor do integral com 8 algarismos significativos podemos proceder do seguinte modo.

i. Determinar M de modo que $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx < 0.5 \times 10^{-8}$. Como para $M > 1$ temos $e^{-x^2} < e^{-x}$ podemos majorar o integral impróprio por $\int_M^{+\infty} e^{-x}\,dx$ e escolher M resolvendo $e^{-M} < 0.25 \times 10^{-8}$.

ii. Escolhido M, determinamos o número de subdivisões de $[0, M]$ de modo quen o erro de integração seja também inferior a 0.25×10^{-8}.

Desta forma o erro global, soma do erro proveniente da truncatura do intervalo de integração com o erro de integração no intervalo limitado, fica abaixo do limiar pretendido.

3. *Considere o problema de valor inicial* $y' = \sin(x+y^2), \quad y(0) = 0$. *Determine um valor aproximado de* $y(1/2)$ *utilizando o método de Euler com* $h = 0.1$ *e estime o erro cometido.*

$$u_{k+1} = u_k + hf(x_k, u_k) = u_k + 0.1\sin(x_k + u_k^2)$$

$$\begin{aligned}
y(0.0) = u_0 &= 0 \\
y(0.1) \approx u_1 &= u_0 + 0.1\sin(x_0 + u_0^2) = 0. \\
y(0.2) \approx u_2 &= u_1 + 0.1\sin(x_1 + u_1^2) = 0.00998334 \\
y(0.3) \approx u_3 &= u_2 + 0.1\sin(x_2 + u_2^2) = 0.02986 \\
y(0.4) \approx u_4 &= u_3 + 0.1\sin(x_3 + u_3^2) = 0.0594972 \\
y(0.5) \approx u_5 &= u_4 + 0.1\sin(x_4 + u_4^2) = 0.0987649
\end{aligned}$$

$$|y(0.5) - u_5| \leq \frac{M/10}{2L}|e^{L/2} - 1| \leq \frac{1}{20}(e^0.5 - 1) = 0.0324361$$

* Como $|y'| \leq 1$ podemos concluir que $|y(x)| \leq 0.5, \quad x \in [0, 0.5]$.

* $M = \sup\limits_{[0,0.5]} |y''(x)| = \sup\limits_{[0,0.5]} |\cos(x+y^2) + y\sin(2x+2y^2)| \leq 1.5$

* $L = \sup\limits_{[0,0.5]} |\frac{\partial f}{\partial y}| = \sup\limits_{[0,0.5]} |2y\cos(x+y^2)| \leq 1$

4. *Seja* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $|f^{(m)}(x)| \leq M, \quad x > 0, m \in \mathbb{N}$. *Seja ainda* $p_n(x)$ *o polinómio interpolador de* f *nos pontos* $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{n}{2}$. *Mostre que* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$, *para cada* $x \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
|f(x)-p_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x(x-\frac{1}{2})(x-\frac{2}{2})\cdots(x-\frac{n}{2})\right| \\
&\leq \frac{M}{(n+1)!}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{2} \\
&\leq \frac{Mn!}{(n+1)!2^{n+1}} \to 0 \quad (n\to+\infty)
\end{aligned}
$$