

Grupo I [10 val]

1. Considere o sistema não linear $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^2 + y^2/4 = 1 \end{cases}$. Localize graficamente

as soluções do sistema e, usando três iterações do método de Newton, calcule uma aproximação da solução pertencente ao primeiro quadrante. Sabendo que a solução exacta é $(x, y) = (1/\sqrt{5}, 1/(2\sqrt{5}))$, forneça uma estimativa do coeficiente assintótico de convergência.

2. Considere um empréstimo de L u.m. por um período de n meses, com uma taxa de juro mensal constante $r > 0$. O valor da prestação constante é dado por $k = rL/(1 - (1 + r)^{-n})$.

- (a) Suponha que L, n e k são conhecidos e se pretende determinar a taxa de juro. Mostre que essa taxa é ponto fixo da função $g(x) = k(1 - (1 + x)^{-n})/L$.
- (b) Considere $L = 5000$, $k = 350$ e $n = 24$. Mostre que a função g tem um único ponto fixo z no intervalo $[0.04, 0.06]$ e a sucessão definida por $r_{i+1} = g(r_i)$ converge para z qualquer que seja a aproximação inicial $r_0 \in [0.04, 0.06]$.
- (c) Nas condições da alínea anterior, diga quantas iterações do método do ponto fixo devem ser efectuadas de modo a obter uma aproximação da taxa de juro com um erro absoluto inferior 10^{-6} . Sabendo que $r_{20} = 0.0464661$, determine a referida aproximação.

3. Considere as matrizes A e A^{-1} definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2 - 2a^2} \begin{bmatrix} 2 - a^2 & -a & a^2 \\ -a & 1 & -a \\ a^2 & -a & 2 - a^2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Obtenha a expressão de $\text{cond}_1(A)$ e estude o condicionamento da matriz quando $a \rightarrow 1$ e $a \rightarrow \infty$.
- (b) Prove que, se $|a| < 1$, o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja o vector $b \in \mathbb{R}^n$ e qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
- (c) Admita que $|a| = 1/2$ e que $\|x - x^{(0)}\|_\infty < 1$, onde x é a solução do sistema linear em causa. Quantas iterações do método de Jacobi é necessário realizar para obter uma aproximação $x^{(k)}$ que verifique $\|x - x^{(k)}\|_\infty < 0.5 \times 10^{-3}$?

Grupo II [10 val]

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^5(\mathbb{R})$.

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	1/2	1	0	4

- (a) Determine o polinómio $p_4(x)$, de grau não superior a 4, que interpola f nos pontos da tabela. Sabendo que $|f^{(5)}(x)| < 10$, determine um majorante para o erro de interpolação.
- (b) Usando o método dos mínimos quadrados, determine

$$Q = \min_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \sum_{i=0}^4 (f(x_i) - \alpha - \beta x_i^2)^2.$$

- (c) Calcule uma aproximação de $I(f) = \int_0^4 f(x) dx$, utilizando o método de Romberg.

2. Pretende-se calcular o integral $I(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx$, usando uma regra de quadratura do tipo $Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$. Determine os nós de quadratura x_0, x_1 e os pesos A_0, A_1 , de modo que o grau da fórmula seja o maior possível. Qual o grau da fórmula obtida?

Nota: $I(1) = \pi/2$, $I(x^2) = 2 - \pi/2$, $I(x^4) = \pi/2 - 4/3$.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y/t + 1, & t > 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

- (a) Mostre que o problema de valor inicial tem uma e uma só solução, definida em $[1, +\infty[$.
- (a) Utilizando o método de Euler, calcule uma aproximação de $y(2)$ com erro absoluto inferior a 0.2. Justifique cuidadosamente o valor escolhido para o passo de tempo h .
- (b) Calcule uma aproximação de $y(2)$ usando o método de Crank-Nicholson, com $h = 1/2$. Sabendo que a solução exacta do problema é $y(t) = t \ln t$, determine o erro cometido. Compare com as conclusões da alínea (b) e comente.

Cotação: (1.5 + 1.5 + 1.5) + 1.5 + (1.0 + 1.5 + 1.5)