Análise Numérica

Licenciatura em MAEG

Época de Recurso, 24/06/2015

1. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 2x - 1}{x^2}$. Mostre que o algoritmo

$$z_1 = (x+1)^2, \quad z_2 = z_1 - 2x - 1, \quad z_3 = z_2/x^2$$

é numericamente instável quando utilizado no cálculo de valores de f para x próximo de zero.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{z_1} =& x \cdot \frac{2(x+1)}{(x+1)^2}\varepsilon_x + \varepsilon_{a_1} = \frac{2x}{x+1}\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{a_1} \\
\varepsilon_{z_2} =& z_1 \cdot \frac{1}{z_1 - 2x - 1}\varepsilon_{z_1} + x \cdot \frac{-2}{z_1 - 2x - 1}\varepsilon_x + \varepsilon_{a_2} = \frac{(x+1)^2}{x^2}\varepsilon_{z_1} - \frac{2}{x}\varepsilon_x + \varepsilon_{a_2} \\
=& \frac{2(x+1)}{x}\varepsilon_x + \frac{(x+1)^2}{x}\varepsilon_{a_1} - \frac{2}{x}\varepsilon_x + \varepsilon_{a_2} = 2\varepsilon_x + \frac{(x+1)^2}{x}\varepsilon_{a_1} + \varepsilon_{a_2} \\
\varepsilon_{z_3} =& x\frac{\frac{-2z_2}{x^3}}{z_2/x^2}\varepsilon_x + z_2\frac{1/x}{z_2/x}\varepsilon_{z_2} + \varepsilon_{a_3} = -2\varepsilon_x + \varepsilon_{z_2} + \varepsilon_{a_3} \\
=& \frac{(x+1)^2}{x}\varepsilon_{a_1} + \varepsilon_{a_2} + \varepsilon_{a_3}
\end{aligned}$$

Considerando que o coeficiente de ε_{a_1} é ilimitado em $x = 0$, podemos afirmar que o algoritmo é numericamente instável para valores de x próximos de zero.

2. Considere a equação $x^2 + 10\cos x = 0$.

(a) Mostre que a equação tem uma única solução z no intervalo $[3, 3.2]$. Construa uma sucessão garantidamente convergente para z e utilize-a para determinar uma aproximação com erro inferior a 0.5×10^{-3}.

A função $g(x) = \sqrt{-10 * cosx}$ é contínua e diferenciável em $I = [3, 3.2]$ e, nesse intervalo, as raízes da equação dada são exactamente os pontos fixos de g. Observando o sinal de g' nesse intervalo vemos que $g([3,3.2]) = [g(3), g(\pi)] \subset I$. Por outro lado, como $g'' < 0$ vemos que $g'(I) = [g'(3), g'(3.2)]$, pelo que $|g'(x)| \leq g'(3) = 0.224255 = L$. A função g é então contínua, diferenciável, invariante e contrativa em I pelo que o teorema do ponto fixo garante que tem nesse intervalo um único ponto fixo, z, que será a solução da equação inicial. Além disso, a sucessão $x_{n+1} = \sqrt{-10\cos x_n}$ converge para z, qualquer que seja $x_0 \in I$. Relativamente à obtenção da aproximação com a precisão indicada, usaremos a estimativa de erro *a posteriori*

$$|z - x_{n+1}| \leq \frac{L}{1-L}|x_{n+1} - x_n| := M_{n+1}$$

i	x_i	M_i
0	3.1	-
1	3.16091	0.176081×10^{-1}
2	3.16198	0.31011×10^{-3}

Propomos então a aproximação $z \approx x_2 = 3.16198$.

(b) A equação tem outra solução $z_2 \approx 2$. Escolha um intervalo em que o método de Newton seja convergente para z_2 e utilize-o para obter uma aproximação de z_2 com 4 casas decimais correctas.

Tomando o intervalo $I = [1.9, 2.1]$ verificamos facilmente todas as condições de convergência do método de Newton, isto é, $f(x) = x^2 + 10\cos x$ é duas vezes continuamente diferenciável em I, $f(1.9) \times f(2.1) = -0.240766 < 0$, f' e f'' não mudam de sinal. Além disso, como $|f(1.9)/f'(1.9)| < 0.2$ e $|f(2.1)/f'(2.1)| < 0.2$, o método de Newton converge para qualquer aproximação inicial $x_0 \in I$. Relativamente ao erro cometido, temos que

$$|z - x_n| \leq \frac{1}{K}(K|z - x_0|)^{2^n}, \qquad K = \frac{\max_{[1.9,2.1]}|f''|}{2\min_{[1.9,2.1]}|f'|} = 0.795162$$

Escolhendo $x_0 = 2$ temos $|z - x_0| < 0.1$ e utilizando a desigualdade anterior vemos que que obter 4 casas decimais correcta devemos realizar 3 iterações:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.9683 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.96887 \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.96887
\end{aligned}$$

3. Considere a matriz $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3+\varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & -2+\varepsilon & 1 \\ 1 & 0 & 6+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$

(a) Utilizando o teorema de Gershgorin mostre que a matriz A_0 é invertível. Para que valores de ε o teorema de Gershgorin garante a invertibilidade de A_ε?

Utilizando os círculos de Gershgorin em colunas, sabemos que qualquer valor próprio de A_0 pertence à reunião dos círculos

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 2\}, \;\; C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq 1\}, \;\; C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-6| \leq 2\}$$

Como nenhum destes círculos contém a origem, $\lambda = 0$ não é valor próprio de A_0 pelo que a matriz é invertível. Quando aumentamos o valor de λ todos os círculos se vão deslocando para a direita. Quando $ve = 1$ o círculo C_2 toca a origem pelo que já não temos garantia de invertibilidade. Continuando a aumentar ε o círculo C_2 fica totalmente á direita da origem e temos novamente garantia de invertibilidade. Resumindo, se $\varepsilon \in [0,1[\cup]3,+\infty[$, a matiz A_ε é certamente invertível.

(b) Efectue 2 iterações do método das potências para obter uma aproximação do valor próprio de maior módulo de A_0. Comente os resultados.

Tomando $v^{(0)} = (1,1,0)$ temos que $v^{(2)} = \dfrac{A_0^2 v^{(0)}}{\|A_0^2 v^{(0)}\|_2} = \left(\dfrac{12}{\sqrt{293}}, \dfrac{7}{\sqrt{293}}, \dfrac{10}{\sqrt{293}}\right)$. Assim a nossa aproximação do valor próprio dominante será

$$\lambda^{(2)} = \left(v^{(2)}\right)^T A_0 v^{(2)} = \frac{1412}{293},$$

Esta aproximação do valor próprio dominante, não sendo eventualmente de grande qualidade devido ao baixo número de iterações, é mesmo assim compatível com os círculos de Gershgorin determinados na alínea anterior.

(c) Obtenha uma factorização triangular $A_0 = L_0 U_0$.

Por exemplo, a factorização de Doolittle de A_0 é dada por

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -7/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 39/7 \end{pmatrix}$$

(d) Considerando $b_\varepsilon = [1 \;\; 0 \;\; \varepsilon]^T$ e designando por x_ε a solução do sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, determine um majorante para $\|x_{1/10} - x_0\|_\infty$. (obs: $\|A_0^{-1}\|_\infty =$

$\frac{8}{13})$

$$\begin{aligned}\frac{\|x_{1/10}-x_0\|_\infty}{\|x_0\|_\infty} \leq & \frac{\|A_0\|_\infty \|A_0^{-1}\|_\infty}{1-\|A_0^{-1}\|_\infty \|A_0 - A_{1/10}\|_\infty}\left(\frac{\|A_0 - A_{1/10}\|_\infty}{\|A_0\|_\infty} + \frac{\|b_{1/10}-b_0\|_\infty}{\|b_0\|_\infty}\right) \\ = & \frac{7\times\frac{8}{13}}{1-\frac{8}{13}\times\frac{1}{10}}\left(\frac{1/10}{7}+\frac{1/10}{1}\right) = \frac{32}{61}\end{aligned}$$

Finalmente, para obter a majoração pedida devemos determinar $\|x_0\|$, o que pode ser feito resolvendo o sistema $A_0 x_0 = b_0$. Deste modo concluímos que $\|x_0\| = \frac{4}{13}$, pelo que $\|x_{1/10} - x_0\|_\infty \leq \frac{128}{793}$.

4. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^\infty[0,1]$ que verifica $\|f^{(n)}\|_\infty \leq 2n^2$.

x	0	1/4	1/2	3/4	1
$f(x)$	0	1/2	1	1/3	1

(a) Determine o polinómio $p(x)$ que interpola f nos pontos da tabela, utilize-o para estimar o valor de $f(1/3)$ e obtenha um majorante para o erro cometido.

Usando por exemplo uma tabela de diferenças divididas, podemos obter facilmente

$$p_4(x) = \frac{352x^4}{9} - \frac{640x^3}{9} + \frac{326x^2}{9} - \frac{29x}{9}.$$

Assim, a nossa estimativa será $f(1/3) \approx p_4(1/3) = \frac{583}{729} \approx 0.799726$. O erro pode ser majorado por

$$\begin{aligned}|f(1/3) - p_4(1/3)| \leq & \frac{\|f^{(5)}\|_\infty}{5!}\left|\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\times(\frac{1}{3}-\frac{3}{4})\times(\frac{1}{3}-1)\right| \\ & \approx 0.00054\end{aligned}$$

(b) Determine a melhor aproximação dos dados, no sentido dos mínimos quadrados, por funções do tipo $g(x) = \alpha x + \beta x^3$.

(c) Utilize o método de Romberg para obter uma aproximação de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(d) Comente a seguinte afirmação: *"Se utilizassemos a regra de Simpson composta para aproximar o mesmo integral, o erro seria menor."*

5. Considere o problema de valores iniciais

$$y'(t) = t\exp\{-y(t)\}, \quad y(0) = 0.$$

(a) Utilize o método de Euler progressivo com $h = 0.2$ para determinar uma aproximação de $y(1)$ e estime o erro cometido.

(b) Deduza o método de Taylor de ordem 2 para este problema de valor inicial e obtenha uma aproximação de $y(1)$ com $h = 0.5$.

Cotação: **1**. 1.5 **2**.(a) 2.0 (b) 2.0 **3**. (a) 1.5 (b) 1.5 (c) 1.5 (d) 1.5 **4**. (a) 1.5 (b) 1.5 (c) 1.5 (d) 1.0 **5**. (a) 1.5 (b) 1.5