Instituto Superior de Economia e Gestão

Análise Numérica | Época Especial, 3/9/2010

1. Considere a equação não linear, $x^2 - \cos x = 0$.

(a) Mostre que a equação tem uma e uma só só raíz z no intervalo $[0,1]$ e que a função iteradora $g(x) = \sqrt{\cos x}$ permite obter sucessões convergentes para z.

(b) Usando o método do ponto fixo, calcule uma aproximação de z com erro absoluto inferior a 10^{-1}.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2\sin a & 1+\sin a \\ \sin a + \sin b & 17 & \sin b \\ 2 & 1 & 50 - c^2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$

(a) Para que valores das contantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ o teorema de Gershgorin permite construir três círculos disjuntos contendo valores próprios de A ?

(b) Tomando $\sin a = \sin b = 0$ e $c = \sqrt{50}$, efectue uma iteração do método das potências para obter uma aproximação do valor próprio dominante, partindo do vector $u^{(0)} = (1, 1, 0)$. Qual o valor do erro cometido ?

(c) Nas mesmas condições da alínea anterior, suponha que se pretende resolver o sistema $Ax = (0, \sqrt{3}, 0)$. Determine um majorante para o erro relativo da solução do sistema, se utilizarmos a aproximação $\sqrt{3} \approx 1.7$. (nota: $\|A^{-1}\|_\infty = 53/17$)

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^5(\mathbb{R})$.

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	1/2	1	0	4

(a) Determine o polinómio $p_4(x)$, de grau não superior a 4, que interpola f nos pontos da tabela. Sabendo que $|f^{(5)}(x)| < 10$, determine um majorante para o erro de interpolação.

(b) Usando o método dos mínimos quadrados, calcule o valor de

$$Q = \min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{4} \left(f(x_i) - \alpha - \beta x_i^2 \right)^2 .$$

(c) Calcule uma aproximação de $I(f) = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, utilizando o método de Romberg.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y/t + 1, \quad t > 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(a) Utilizando o método de Euler, calcule uma aproximação de $y(2)$ com erro absoluto inferior a 0.2. Justifique cuidadosamente o valor escolhido para o passo de tempo h.

(b) Calcule uma aproximação de $y(2)$ usando o método de Taylor de segunda ordem, com $h = 1/2$. Sabendo que a solução exacta do problema é $y(t) = t \ln t$, determine o erro cometido. Compare com as conclusões da alínea anterior e comente.