

1. Considere a equação  $\arctan(x+1) - 2x = 0$ .

- (a) Mostre que a equação tem uma única solução  $z \in \mathbb{R}$ . Utilize a sucessão  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan(x_n + 1)$  para determinar uma aproximação de  $z$  com erro inferior a  $0.5 \times 10^{-3}$ .
- (b) Escolha um intervalo no qual possa garantir a convergência do método de Newton e utilize-o para obter uma aproximação de  $z$  com erro inferior a  $0.5 \times 10^{-6}$ .

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \sin(x_1 + x_2) = 0 \\ \cos(x_1 + x_2) + 3x_2 = 0 \end{cases}.$$

- (a) Mostre que o sistema tem uma e uma só solução em  $Z \in \mathbb{R}^2$  e construa uma sucessão  $X^{(n)}$  convergente para essa solução.
- (b) Especifique quantas iterações teria que calcular para que  $\|X^{(n)} - Z\|_\infty < 0.5 \times 10^{-6}$ .
- (c) Ao aplicar o método de Newton ao sistema, com  $X^{(0)} = (1/10, 1/10)$ , obtemos  $X^{(1)} = X^{(0)} + Y^{(0)}$ . Escreva o sistema linear que deve ser resolvido para determinar  $Y^{(0)}$ , calcule duas iterações do método de Jacobi e diga quantas mais iterações deveriam ser calculadas para que o erro de resolução do sistema linear fosse inferior a  $0.5 \times 10^{-6}$ .

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f \in C^\infty[0, 4]$  que verifica  $\|f^{(n)}\|_\infty \leq n$ .

$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0.54	1.34	1.00	0.30

- (a) Determine o polinómio  $p(x)$  que interpola  $f$  nos pontos da tabela, utilize-o para estimar o valor de  $f(1.5)$  e obtenha um majorante para o erro cometido.

- (b) Mostre que o polinómio  $p(x)$  verifica  $\|p^{(n)}\|_\infty > n$ ,  $n = 2, 3$ . Comente.
- (c) Utilize o método de Romberg para obter a melhor estimativa possível para  $\int_0^4 f(x) dx$ .
- (d) Utilizando diferenças finitas, obtenha uma aproximação de  $f'(2)$  e apresente um majorante para o erro cometido.

4. Considere o problema de valores iniciais

$$y'(t) = \frac{1}{2 + y(t)^2}, \quad y(0) = 0$$

Utilize o método de Euler progressivo com  $h = 0.2$  para determinar uma aproximação de  $y(1)$ . Estime o erro cometido.

RESOLVA APENAS UMA DAS SEGUINTE QUESTÕES:

5. Supondo que a sucessão definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{f'(x_n)^3}$$

converge para uma solução da equação  $f(x) = 0$ , mostre que a ordem de convergência é pelo menos três.

6. Considere um conjunto de dados  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ , e a respetiva reta de regressão  $y = \alpha + \beta x$ . Mostre que a reta de regressão passa necessariamente no ponto de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , designado por *baricentro*.

---

**Cotação:** 1. (a) 2.0 (b) 2.0    2.(a) 2.0 (b) 2.0 (c) 2.0    3. (a) 1.5 (b) 1.5 (c) 2.0 (d) 2.0  
 4. 2.0    5. 2.0    6. 2.0