Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Numérica

Avaliação Contínua - Teste 1 17/04/2012

---

1. Considere a função $f(x) = \log(e^x + 1) - x$. Discuta o condicionamento do problema do cálculo de valores de f para valores elevados de x.

2. A equação $-x^3 + 10x - 1 - e^x = 0$ possui duas raízes positivas, $0 < z_1 < z_2$.

   (a) Mostre que, se x_0 for escolhido no intervalo $[2, 3]$, estão asseguradas as condições de convergência do método de Newton para a maior raiz positiva, z_2.

   (b) Efectue três iterações do método de Newton e determine um majorante do erro cometido.

   (c) Mostre que a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = \dfrac{e^{x_n} + 1 + x_n^3}{10}$ converge para z_1 qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$ e determine o número de iterações que devem ser calculadas de modo a obter uma aproximação de z_1 com erro absoluto inferior a 0.5×10^{-6}.

3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} 10x - \varepsilon xy = 0 \\ \\ 5y - \varepsilon^2 \cos(x+y) = 0 \end{cases} , \quad \varepsilon > 0.$$

   (a) Mostre que, para ε suficientemente pequeno, o sistema tem uma única solução no conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_\infty < 1\}$.

   (b) Considere $\varepsilon = 1$ e calcule três iterações do método do ponto fixo. Forneça uma estimativa para o número de iterações necessárias para atingir uma precisão de 8 algarismos significativos.

4. Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Sabendo que $\|A^{-1}\|_1 = 5/7$, estime o erro cometido na solução do sistema se o segundo membro utilizado for $\tilde{b} = (0.0001, 1, 0.0001)^T$.

(b) Mostre que o método de Gauss-Seidel é convergente, qualquer que seja $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ e calcule três iterações. Indique quantas mais iterações deveriam ser realizadas de modo a garantir que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}\|_1 \leq 0.5 \times 10^{-8}$.

(c) Determine uma factorização $A = LU$ e utilize-a para resolver o sistema.

Tópicos de Resolução

1. Ignorando os erros de arredondamento temos que

$$\varepsilon_f = x\frac{f'(x)}{f(x)}\varepsilon_x = -\frac{\dfrac{x}{e^x+1}}{\log(e^x+1)-x}\varepsilon_x.$$

Por outro lado, uma vez que pretendemos analisar o condicionamento do problema para valores elevados de x devemos analizar o comportamento do número de condição quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{e^x+1}}{\log(e^x+1)-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}}{\dfrac{e^x}{e^x+1}-1} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1-xe^x)(e^x+1)}{(e^x+1)^2}$$
$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^x-xe^{2x}+e^x+1-xe^x}{e^{2x}+2e^x+1} = +\infty$$

Uma vez que o número de condição não é limitado para valores grandes de x, concluímos que o problema não é bem condicionado.

2.

(a) A função em causa é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e é fácil verificar que **i.** $f(2)\cdot f(3) \approx -65.3059 < 0$; **ii.** $f''(x) = -e^x - 6x < 0, \quad x \in [2,3]$; **iii.** Como $f'(2) \approx -9.38906 < 0$ e f' é decrescente ($f'' < 0$), temos que $f' < 0, \quad x \in [2,3]$; **iv.** $|f(2)/f'(2)| = 0.384591 < |3-2|$ e $|f(3)/f'(3)| = 0.487671 < |3-2|$.

Estão assim verificadas as condições suficientes de convergência, para qualquer aproximação inicial $x_0 \in [2,3]$.

(b) O método de Newton corresponde neste caso a calcular termos da sucessão

$$\begin{cases} x_0 \in [2.5, 3] \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{-x_n^3+14x_n-1-e^{x_n}}{-3x_n^2+14-e^x} \end{cases}$$

Temos assim,

$$\begin{aligned} x_0 =& 2.750000000 \\ x_1 =& 2.318106052 \\ x_2 =& 2.291567763 \\ x_3 =& 2.291029281. \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$M = \max_{2<x<3} |f''(x)| = 38.0855, \qquad L = \min_{2<x<3} |f'(x)| = 9.38906, \qquad K = \frac{M}{2K} = 2.02819,$$

podemos utilizar a fórmula do erro para o método de Newton,

$$|z_2 - x_3| \leq K^7 |z_2 - x_0|^8 \leq (2.02819)^7 (0.25)^8 \leq 0.215416 \times 10^{-2}.$$

(c) Tendo em conta que

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow 10x = e^x + 1 + x^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}(e^x + 1 + x^3),$$

concluímos que as soluções da equação proposta são exactamente os pontos fixos da função $g(x) = \frac{1}{10}(e^x + 1 + x^3)$. Vamos então verificar se estão reunidas as condições de aplicação do teorema do ponto fixo à função g, no intervalo9 $[0,1]$. A função é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ e em particular no intervalo $[0,1]$. Como $g''(x) = (e^x + 6x)/10 > 0$, a função g' é crescente. Sendo $g'(0) = 1/10, g'(1) = 0.571828$, concluímos que o maior valor de $|g'|$ é atingido em $x = 1$, pelo que a constante de Lipschitz de g é precisamente $L = 0.571828 < 1$, pelo que g é contractiva. finalmente, como $g' > 0$, sabemos que $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [0.2, 0.471828] \subset [0,1]$, pelo que g é invariante.

Verificadas as condições do teorema do ponto fixo, o mesmo garante que g tem um e um só ponto fixo no intervalo $[0,1]$ e que o método do ponto fixo converge para essa solução, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0,1]$. É tambem válida a estimativa de erro *a priori*

$$|z_1 - x_n| \leq L^n |z_1 - x_0| \leq (0.571828)^n.$$

Assim, para atingir a precisão mencionada basta exigir que $(0.571828)^n < 0.5 \times 10^{-6}$, o que é verificado se $n \geq 30$.

3.

(a)

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x - \varepsilon xy = 0 \\ \\ 5y - \varepsilon^2 \cos(x+y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\varepsilon}{10} xy \\ \\ y = \frac{\varepsilon^2}{5} \cos(x+y) \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = G(x,y).$$

A função G acima definida é contínua em $\mathbb{R}^2$. Devemos agora ver para que valores de *varepsilon* podemos garantir que G é contractiva e invariante em Ω.

$$\|G(x,y)\|_\infty \leq \max\{\max_\Omega |\varepsilon xy/10|, \max_\Omega |\varepsilon^2 \cos(x+y)/5|\} \leq \max\{\varepsilon/10, \varepsilon^2/5\}.$$

Assim, se $\varepsilon < \sqrt{5}$, teremos que $\|G(x,y)\|_\infty < 1$, pelo que $G(\Omega) \subset \Omega$, sendo G invariante. Relativamente à contractividade, sendo G diferenciável, devemos analisar a norma da matriz jacobiana.

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} \varepsilon y/10 & \varepsilon x/10 \\ \\ -\frac{\varepsilon^2}{5}\sin(x+y) & -\frac{\varepsilon^2}{5}\sin(x+y) \end{pmatrix}$$

$$\|J_g(x,y)\|_\infty \leq \max\{\varepsilon/5, 2\varepsilon^2/5\}$$

Assim, para garantirmos a contractividade de G basta exigir que $\varepsilon < \sqrt{5/2}$. Finalmente conluímos que, se $\varepsilon < \sqrt{5/2}$, são verificadas as condições do teorema do ponto fixo, pelo que G tem um e um só ponto fixo em Ω.

(b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(0)} &= (0,0) \\ \boldsymbol{x}^{(1)} &= (0,0.05) \\ \boldsymbol{x}^{(0)} &= (0,0.0499375) \\ \boldsymbol{x}^{(0)} &= (0,0.0499377) \end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}^{(n+3)}\|_\infty \leq \frac{L^n}{1-L}\|\boldsymbol{x}^{(3)} - \boldsymbol{x}^{(2)}\|_\infty \leq \frac{(2/5)^n}{1-2/5} \cdot 1.56055 \times 10^{-7}$$

Assim, o n mero de iterações a realizar pode ser estimado resolvendo a inequação

$$\frac{(2/5)^n}{1-2/5} \cdot 1.56055 \times 10^{-7} < 0.5 \times 10^{-8} \Leftrightarrow n \geq 5.$$