Análise Numérica

Licenciatura em MAEG

Época Normal, 31/05/2016

Parte II

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

x_i	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x_i)$	1.0	0.0	0.5	1.5	2.5

(a) Determine o polinómio de grau ≤ 4 que interpola f nos pontos tabelados. Supondo que $\|f^{(n)}\|_\infty \leq 2n$, obtenha um majorante para o erro de interpolação no ponto $x = 1.25$.

Solução: O polinómio interpolador pode ser determinado, por exemplo, a partir da tabela de diferenças divididas:

x_i	$f(x_i)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	1				
		-2			
0.5	0		3		
		1		$-\frac{4}{3}$	
1.0	0.5		1		$\frac{1}{3}$
		2		$-\frac{2}{3}$	
1.5	1.5		0		
		2			
2.0	2.5				

Temos assim

$$p_4(x) = 1 - 2x + 3x(x-0.5) - \frac{4}{3}x(x-0.5)(x-1) + \frac{1}{3}x(x-0.5)(x-1)(x-1.5).$$

Relativamente ao erro de interpolação no ponto $x = 1.25$ sabemos que

$$f(1.25) - p_4(1.25) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(1.25-0)(1.25-0.5)(1.25-1)(1.25-1.5)(1.25-2)$$

logo,

$$|f(1.25) - p_4(1.25)| \leq \frac{\|f^{(5)}\|_\infty}{5!} \times 0.0439453 \leq \frac{10}{5!} \times 0.0439453 = 0.366211 \times 10^{-2}.$$

(b) Determine uma aproximação de $\int_0^2 f(x)dx$ utilizando a regra de Simpson composta e apresente um majorante do erro cometido.

Solução:

$$S = \frac{0.5}{3}(1 + 4\times 0 + 2\times 0.5 + 4\times 1.5 + 2.5) = 1.75$$

Relativamente ao erro cometido, sabemos que

$$\left|\int_0^2 f(x)dx - S\right| = \left|-\frac{(2-0)\times 0.5^4}{180} f^{(4)}(\xi)\right| \leq 0.5556\times 10^{-2}$$

2. Considere $h > 0, n > 1$ fixos e os pontos $x_i = ih, i = 0, \cdots n$. Mostre que

$$\sum_{i=0}^{n}\left(x_i^2 \int_0^{nh} L_i(x)dx\right) = \frac{n^3h^3}{3}.$$

Solução:

O polinómio interpolador de $f(x) = x^2$ nos pontos $x_0, \cdots, x_n$ é dado justamente por $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 L_i(x)$. Por outro lado, o polinómio de grau $\leq n$ que interpola $f(x) = x^2$ nos pontos indicados é, por unicidade do polinómio interpolador, $p_n(x) = x^2$.Assim,

$$\sum_{i=0}^{n}\left(x_i^2 \int_0^{nh} L_i(x)dx\right) = \int_0^{nh}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 L_i(x)\right)dx = \int_0^{nh} x^2 dx = \frac{n^3h^3}{3}.$$

3. Suponha que pretende calcular numericamente o integral impróprio $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx$ com erro inferior a uma dada tolerância $\varepsilon > 0$. Explique detalhadamente como poderia atingir este objectivo utilizando a regra dos trapézios composta (*).

Solução: A regra dos trapézios composta é aplicável à aproximação numérica de integrais de funções suficientemente regulares em intervalos limitados. Como a região de integração proposta é um intervalo ilimitado, teremos que começar por tratar esse problema. Para isso, podemos dividir o intervalo $[0, +\infty[$ em dois intervalos: Um intervalo limitado onde vamos efectivamente aplicar a regra dos trapézios; e um ilimitado mas cuja contribuição para o resultado já não é significativa. Vamos então tomar $M \geq 1$ e observar que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \int_0^M x^2 e^{-x^4} dx + \int_M^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx$$

Se designarmos por T_n a aproximação obtida por aplicação da regra dos trapézios com n subintervalos à função $x^2 e^{-x^4}$ no intervalo $[0, M]$ e E_n o respectivo erro, temos que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx - T_n = E_n + \int_M^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx$$

Assim, se escolhermos $M > 1$ de modo que $\int_M^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > 1$ de modo que $|E_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, calculamos o integral impróprio dentro da tolerância proposta. Concretizando, resta determinar valores de M e n que possam satisfazer as desigualdades anteriores.

- Como $M > 1$ temos,

$$\left| \int_M^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx \right| < \left| \int_M^{+\infty} x^3 e^{-x^4} dx \right| = \frac{1}{4} \left| \int_M^{+\infty} 4x^3 e^{-x^4} dx \right| = \frac{1}{4} e^{-M^4}$$

Logo devemos tomar M de modo que $\frac{1}{4} e^{-M^4} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow M > \sqrt[4]{\log(2\varepsilon)}$. Observe-se que, mesmo para uma tolerância de 10^{-16} bastaria escolher $M = \frac{5}{2}$.

- Relativamente a n,

$$|E_n| \leq \frac{(M-0)(M/n)^2}{12} \max_{[0,M]} |(x^2 e^{-x^4})''| \leq \frac{5M^3}{12n^2}$$

pelo que basta tomar $n \geq \sqrt{\frac{5M^3}{6\varepsilon}}$. No limite, para uma tolerância de 10^{-16}, deveríamos ter $n \geq 6.28 \times 10^8$.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \sin(ty) \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

(a) Suponha que foi aplicado o método de Euler progressivo com $h = 0.01$, tendo-se obtido $y(0.98) \approx 1.50817$. Apresente uma estimativa de $y(1)$ e o respectivo majorante do erro.

Solução: Aplicando o método de Euler a partir da condição $u_{98} = 1.50817$ temos

$$\begin{aligned} u_{99} =& u_{98} + 0.01 \sin(0.98 \times u_{98}) = 1.518127 \\ u_{100} =& u_{99} + 0.01 \sin(0.99 \times u_{99}) = 1.528093 \end{aligned}$$

Relativamente ao erro cometido, sabemos que

$$|y(1) - u_{100}| \leq \frac{e^L - 1}{2L} \cdot Mh$$

onde

$$\begin{aligned}
M =& \max_{[0,1]} |y''(t)| = \max_{[0,1]} |(y(t) + ty'(t)) \cos(ty(t))| \\
=& \max_{[0,1]} |y(t) \cos(ty(t)) + \frac{t}{2} \sin(2ty(t))| \leq \frac{1}{2} + \max_{[0,1]} |y(t)| \\
L =& \max_{(t,y)} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_{(t,y)} |t \cos(ty(t)) \leq 1
\end{aligned}$$

Como $-1 \leq y' \leq 1$ podemos adicionalmente garantir que para $t \in [0,1]$ temos $0 \leq y(t) \leq 2$. Vemos assim que $M \leq \frac{5}{2}$ e $L \leq 1$. O majorante do erro é então deduzido de

$$|y(1) - u_{100}| \leq \frac{e^L - 1}{2L} \cdot Mh \leq \frac{e-1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{100} \approx 0.02148$$

(b) Obtenha uma aproximação de $y(1)$, usando agora o método de Taylor de ordem 2, com $h = 0.5$.

Solução:O método de Taylor de ordem 2 consiste na aproximação

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t)$$

Neste caso temos que

$$\begin{aligned}
y'(t) =& \sin(ty(t)) \\
y''(t) =& (y'(t))' = (y(t) + ty'(t)) \cos(ty(t)) \\
=& y(t) \cos(ty(t)) + \frac{t}{2} \sin(2ty(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 =& 1 \\
u_1 =& u_0 + 0.5 \sin(0 \cdot u_0) + \frac{0.5^2}{2} (u_0 \cos(0 \cdot u_0) + \frac{0}{2} \sin(2 \cdot 0 \cdot u_0)) = 1.125 \\
u_2 =& u_1 + 0.5 \sin(0.5 \cdot u_1) + \frac{0.5^2}{2} (u_1 \cos(0.5 \cdot u_1) + \frac{0.5}{2} \sin(2 \cdot 0.5 \cdot u_1)) = 1.52559
\end{aligned}$$

Cotação: **1**. (a) 1.5 (b) 1.5 **2**. 1.5 **3**. 2.0 **4**. (a) 2.0 (b) 1.5

Parte I

1. Considere a equação $\ln x - \dfrac{1}{x} = 0$. Mostre que, tomando $x_0 \in [1.5, 2]$, a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = e^{1/x_n}$ converge para uma solução da equação dada. Sabendo que $x_{20} = 1.76322$, obtenha uma aproximação da solução com erro inferior a 0.5×10^{-6}.

Solução: Começamos por notar que a função $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ é contínua e diferenciável em $]0, +\infty[$, e que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Assim, podemos garantir que a equação tem uma e uma só solução no conjunto indicado. Relativamente à convergência da sucessão proposta, observamos que

$$\ln x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = e^{1/x}.$$

Deste modo, a solução da equação proposta será o único ponto fixo de $g(x) = e^{1/x}$. Devemos então verificar se esta função satisfaz as condições do teorema do ponto fixo no intervalo indicado.

i. A função g é contínua em [1.5, 2] e diferenciável em]1.5, 2[. ✓

ii. $g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} < 0$, logo a função é decrescente e $g([1.5, 2]) = [g(2), g(1.5)] = [1.64872, 1.94773] \subset [1.5, 2]$. A função g é por isso invariante em [1.5, 2],

iii. $|g'(x)| = \frac{e^{1/x}}{x^2} \leq 0.86566$, logo g é contractiva em [1.5,2]

Verificadas as condições do teorema do ponto fixo, o mesmo garante que g tem um e um só ponto fixo em [1.5, 2] (que é a única solução da equação em $]0, +\infty[$), e o mesmo pode ser obtido como limite da sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = e^{1/x_n}$, para qualquer $x_0 \in [1.5, 2]$. Assim, podemos ir calculando iterações e a respectiva estimativa de erro *a posteriori* até atingir a precisão desejada.

i	x_i	$\frac{L}{1-L}\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
20	1.76322	-
21	1.76322444	0.286104×10^{-4}
22	1.76322192	0.162329×10^{-4}
23	1.76322335	0.920638×10^{-6}
24	1.76322254	0.522134×10^{-6}
25	1.76322300	0.296125×10^{-6}

O valor pedido para a aproximação da solução da equação é então $x_{25} = 1.76322300$.

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x - \beta(\cos x - \sin y) = 0 \\ x - y - \beta \sin y = 0 \end{cases}, \beta > 0.$$

(a) Mostre que o sistema pode ser reescrito na forma $(x, y) = G(x, y)$, com $G(x, y) = (\beta(\cos x - \sin y), \beta(\cos x - 2\sin y))$.

Solução:A primeira equação é equivalente a $x = \beta(\cos x - \sin y)$ e, substituido x na segunda equação, esta escreve-se como $\beta(\cos x - \sin y) - y - \beta \sin y = 0$, ou seja, $y = \beta(\cos x - 2\sin y)$. Assim, o sistema dado é equivalente a

$$\begin{cases} x = \beta(\cos x - \sin y) \\ y = \beta(\cos x - 2\sin y) \end{cases},$$

o que corresponde ao que pretendíamos mostrar.

(b) Mostre que se $\beta < \frac{1}{3}$ este sistema tem uma e uma só solução em $\mathbb{R}^2$ e construa uma sucessão convergente para essa solução. Tomando agora $\beta = \frac{1}{10}$, obtenha uma aproximação da solução com erro, medido na norma $\|\cdot\|_\infty$, inferior a 0.5×10^{-3}.

Solução: Devemos começar por definir o conjunto onde devemos aplicar o teorema do ponto fixo. Se (x, y) for solução do problema então

$$|x| = |\beta(\cos x - \sin y)| \leq 2\beta$$

$$|y| = |\beta(\cos x - 2\sin y)| \leq 3\beta.$$

Daqui concluímos que qualquer solução do problema pertence ao conjunto $\Omega = [-2\beta, 2\beta] \times [-3\beta, 3\beta]$. A função $G(x, y)$ referida na alínear anterior é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e por isso em Ω, sendo claramente invariante em Ω, já que $G(\Omega) \subset G(\mathbb{R}^2) \subset \Omega$. Resta pois averiguar a contractividade de G.

$$\|J_G(x, y)\|_\infty = \beta \left\| \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos y \\ -\sin x & -2\cos y \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \beta \max\{1, 3\} = 3\beta$$

Deste modo, se $\beta < \frac{1}{3}$, tem-se que $\|J_G\|_\infty < 1$ em Ω, pelo que G é contractiva e o teorema do ponto fixo garante a existência e unicidade de solução, assim como a convergência do método do ponto fixo. Como qualquer solução pertence necessariamente a Ω, fica garantida a existência e unicidade de solução em $\mathbb{R}^2$. A tabela seguinte resume o cálculo das iterações do método do ponto fixo, partindo de $X_0 = (0, 0)$ e usando a majoração do erro dada por

$$\|X_i - Z\|_\infty \leq \frac{3/10}{1 - 3/10} \|X_i - X_{i-1}\|_\infty$$

i	X_i	Maj. Erro
0	$(0,0)$	-
1	$(0.1, 0.1)$	0.42857×10^{-1}
2	$(0.0895171, 0.0795337)$	0.877126×10^{-2}
3	$(0.0916546, 0.0837096)$	0.178967×10^{-2}
4	$(0.0912191, 0.0828579)$	0.365028×10^{-3}

A aproximação pretendida é então $(x, y) = (0.0912191, 0.0828579)$.

3. Considere o sistema linear $Ax = b_\varepsilon$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

(a) Obtenha a decomposição de Cholesky de A e utilize-a para resolver o sistema $Ax = b_1$.

Solução:A matriz A é simétrica e definida positiva, pelo que é possível obter a factorização de Cholesky, dada por $A = LL^T$. Concretamente,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

A decomposição pode ser usada para resolver o sistema inicial, resolvendo sequencialmete dois sistemas triangulares:

$$Ly = b, \qquad L^T x = y$$

$$Ly = b \Leftrightarrow y = (0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$L^T x = y \Leftrightarrow x = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$$

(b) Mostre que o método de Jacobi, quando aplicado à resolução numérica do sistema $Ax = b_1$, é convergente qualquer que seja a aproximação inicial considerada. Tomando $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, calcule duas iterações do método de Jacobi e estime o erro cometido. (**nota:** a norma matricial associada à norma euclideana é $\|M\|_\infty = \max_i |\lambda_i|$)

Solução:A matriz de iteração do método de Jacobi é neste caso dada por

$$C = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que tanto a norma $\|\cdot\|_1$ como a norma $\|\cdot\|_\infty$ desta matriz são iguais a um, os habituais critérios de convergência relacionados com a dominância por linhas ou colunas não são aplicáveis. No entanto, os valores próprios desta matriz são facilmente calculáveis, obtendo-se $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De acordo com a sugestão temos portanto que $\|C\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

$$X_0 = (0, 0)$$
$$X_1 = D^{-1}(b - (L+U)X_0) = (0, 0, \frac{1}{2})$$
$$X_2 = D^{-1}(b - (L+U)X_1) = (0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

O erro cometido pode ser majorado por

$$\|X_2 - Z\|_2 \leq \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\|X_2 - X_1\|_2 \approx 0.603553$$

tendo em conta a alínea anterior, podemos mesmo dizer que o erro é exactamente dado por $\|X_2 - Z\|_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433013$.

Cotação: **1**. 3.0 **2**.(a) 0.5 (b) 2.5 **3**. (a) 2.0 (b) 2.0