

Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2º Semestre 2015/2016
Época Normal: 3 de Junho de 2016
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{|x^2-1|} \leq e^3\}$ e $B = \left\{ \ln \left(\frac{e^5}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$.

- (a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.
- (b) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de B e, caso existam, o máximo e o mínimo de B .
- (c) Escreva a fronteira de $A \cap \mathbb{Q}$ e o conjunto dos pontos de acumulação de B .
- (d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:
 - i. $\forall a \in A \exists \epsilon > 0 :]a - \epsilon, a + \epsilon[\subseteq A$;
 - ii. $\exists x \in \mathbb{R} : x \leq b, \forall b \in B$;

(4,0) 2. (a) Determine a função real de variável real f que verifica $f(0) = 0$, $f'(1) = 0$ e $f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(b) Calcule a área da figura plana limitada por $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $y = e$.

(5,0) 3. Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} \int_0^{2x} (e^t - 1) dt & \text{se } x > 0 \\ \arctan(x+1) + k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Indique, caso existam, os valores de k para os quais f é contínua em \mathbb{R} .
- (b) Calcule $f'(0^+)$. O que pode afirmar sobre $f'(0)$?
- (c) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -1$.
- (d) Indique o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^- x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

(2,0) 4. Prove que a equação $e^x = 2 - x^3$ tem uma e uma só solução real.

(2,5) 5. Estude, em função do parâmetro $\alpha > 0$, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^3 \frac{\sin(x)(e^{x^2} - 1)}{\sqrt[3]{9x^{2\alpha} - x^{2\alpha+2}}} dx.$$

(2,5) 6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f\left(\frac{n+3}{n+1}\right) = \frac{2n+5}{n+1}$. Calcule $f'(1)$.