SOLUÇÕES

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 7 de Junho de 2016

I

1a) $\underbrace{\left(x^2-1\right)sent}_{M(t,x)} \underbrace{- x\cos t}_{N(t,x)}\, x' = 0$, a equação não é exacta porque $\frac{\partial M}{\partial x} = 2xsent \neq \frac{\partial N}{\partial t} = xsent$. Um factor integrante é, por exemplo, $\mu(t) = C\left|\cos t\right| = \cos t$ com $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

b) $\left(1-x^2\right)\cos^2 t = 0$, como $\overline{N}\left(t, x(t)\right) = -x\cos^2 t$ anula-se em $t = \pm\frac{\pi}{2}$, então o intervalo máximo de existência da solução única é $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ao qual pertence o instante inicial, pois nestes pontos fronteiros é atingida a fronteira do domínio de definição da função $f(t, x(t))$.

2a) $\alpha = -6$.

b) $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - \frac{e^{2t}}{4} arctg\left(e^{2t}\right) - \frac{e^{4t}}{8}\log\left(1+e^{-4t}\right)$, $C_1, C_2 \in \Re$.

3a) $(0, k\pi)$, $k \in Z$.

b) $(0, k\pi)$, $\forall k \in Z$ são pontos de sela logo instáveis.

c) $\begin{cases} x(t) = -e^{1-t} \\ y(t) = e^{1-t} \end{cases}$.

II

a) seja x_n a dimensão da população no final do ano $1970+n$, $x_0 = 50\times10^3$ e $x_{10} = 75\times10^3$. A equação é $x_{n+1} = kx_n$ cuja solução geral é $x_n = Ck^n$ com $C \in \Re$. Para encontrar o valor de k considera-se o PVI $\begin{cases} x_{n+1} = kx_n \\ x_0 = 50\times10^3 \end{cases}$ e obtém-se $k = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{10}}$. A solução do PVI é $x_n = 50\times10^3\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{10}}$.

b) $x_{50} = 50\times10^3\left(\frac{3}{2}\right)^5$ representa a dimensão da população no final do ano 2020.

III

a) As singularidades são $z = 2i$ e $z = -2i$, ambas são pólos simples.

b) $\operatorname{Res}(f,2i) = \left(1-\frac{i}{4}\right)e^{-6}$.

c) $z = \pm 2i \in \operatorname{int}\gamma$ onde $\gamma = \{z \in C : |i-z| = 4\}$ é uma curva de Jordan regular, e f é holomorfa no simplesmente conexo $A = \{z \in C : |i-z| < 5\}$.

Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\int_{|i-z|=4} f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Res}(f, z_j) = 2\pi i\left[\left(1+\frac{i}{4}\right)e^{6} + \left(1-\frac{i}{4}\right)e^{-6}\right].$$