



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 7 de Junho de 2016

Duração: 2 horas

I

1. Considere o PVI
$$\begin{cases} xx' \cos t = (x^2 - 1) \sin t \\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} .$$

- a) (1,5) Mostre que a equação não é exacta e determine um factor integrante.
b) (2,5) Utilize como factor integrante a função $\mu(t) = \cos t$ para resolver o PVI, e indique o intervalo máximo de existência de solução.

2. Seja a equação diferencial $x'' + \alpha x' + 8x = 0$.

- a) (1,0) Sabendo que e^{2t} pertence a um sistema fundamental de soluções da equação, determine o valor do parâmetro real α .

b) (3,0) Determine a solução geral da equação $x'' - 6x' + 8x = \frac{e^{4t}}{1 + e^{4t}}$.

3. Considere o sistema de equações diferenciais não linear

$$\begin{cases} x' = -\sin y \\ y' = -x \cos y \end{cases} .$$

- a) (1,0) Determine as soluções de equilíbrio do sistema.
b) (1,5) Estude a estabilidade das soluções de equilíbrio.

- c) (2,5) Resolva o PVI $\begin{cases} X' = AX \\ X(1) = (-1, 1) \end{cases}$ correspondente ao sistema linearizado

$$A = Df(0, -\pi), \text{ e } X(t) = (x(t), y(t)).$$

II

A dimensão da população de uma pequena cidade no final de cada ano é proporcional à sua dimensão no início desse ano. A população teve um crescimento de 50000 habitantes no final de 1970 para 75000 no final de 1980.

- a) (2,0) Escreva a equação com diferenças finitas que descreve a dinâmica do crescimento populacional desta pequena cidade, e apresente a sua solução geral.
- b) (1,5) Qual será a dimensão da população no final do ano 2020? Utilize o resultado obtido na alínea anterior para responder à questão.

III

Considere a função complexa de variável complexa $f(z) = \frac{(1+2z)e^{3iz}}{z^2+4}$.

- a) (1,0) Determine e classifique as singularidades da função.
- b) (1,0) Calcule o resíduo de qualquer singularidade de f que pertença ao semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$.
- c) (1,5) A partir do resultado da alínea anterior, determine o valor do integral

$$\int_{|i-z|=4} \frac{(1+2z)e^{3iz}}{z^2+4} dz, \text{ justificando convenientemente.}$$

fim