Licenciatura MAEG, **Frequência 2**, 21/06/2016
Processos Estocásticos e Aplicações, 3^o ano, 2^o semestre

No decurso do exame não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Se tiver dúvidas, apresente-as por escrito no seu teste, para que as mesmas possam ser consideradas na correcção. `1h30m`**.**
Formalize e fundamente sempre as suas respostas.

1. Considere dois cabos trans-oceânicos de comunicações, identificados pelas letras A e B, que transmitem sinais de um lado para o outro do oceano e operam independentemente um do outro. Estimou-se que o tempo de funcionamento ininterrupto, até ocorrer avaria, de cada um dos cabos pode ser representado por uma distribuição exponencial de média 1. Assim que um dos cabos avaria é imediatamente iniciada a sua reparação. Os tempos de reparação são também independentes e seguem uma distribuição exponencial de média 1/2.

   Considere o processo $\{X(t), t \geq 0\}$, e seja $X(t)$ o número de cabos em funcionamento no instante t. Seja $P_{ij}(s, t+s) = Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$. (50)

   (a) Justifique que $P_{ij}(t, t+s) = P_{ij}(0, t) = P_{ij}(t)$. Interprete e identifique o processo em causa.

   (b) Escreva, justificando, a matriz geradora do processo, $\mathbb{Q}$. Desenhe um grafo com as respectivas ligações.

   (c) Deduza a Equação de Chapman-Kolmogorov do processo.

   (d) Deduza a equação diferencial regressiva envolvendo $P'_{ij}(t)$.

   (e) Suponha que num determinado instante há apenas um cabo a funcionar. Deduza a distribuição do tempo de permanência nesse estado.

   (f) Qual é a probabilidade de num determinado instante o processo transitar para o estado 2 partindo de 1. Justifique.

   (g) Calcule a distribuição estacionária do processo.

2. Considere que um determinado serviço de atendimento da Loja do Cidadão possui dois atendedores, aguardando os clientes numa fila única, se for caso disso. Chegam ao serviço para serem atendidos 80 clientes por hora e o tempo médio de serviço é de 1.2 minutos por cliente. Os tempos entre chegadas e os tempos de serviço são exponenciais. (15)

   (a) Determine o número médio de clientes presentes na fila.

   (b) Determine o tempo médio dispendido por cada visita ao serviço de atendimento.

   (c) Determine a percentagem de tempo que um determinado funcionário do sistema está sem clientes. Justifique.

3. Seja $\{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$ uma sucessão de v.a.'s positivas e i.i.d. com média finita e seja $X_n = X_0 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$. Seja $\xi_i = \exp(\eta_i)$ com $\eta_i \frown Normal(\mu, \sigma^2)$. Para que valores de μ e de σ $\{X_n\}$ é uma martingala? Justifique todos os procedimentos. (20)

4. Seja $\{B(t)\}$ um movimento Browniano standard e μ e σ (> 0) fixos. Considere o movimento Browniano com deriva $\{W(t)\}$, com $W(t) = \mu t + \sigma B(t)$. Calcule $E[W(t)]$ e $Cov[W(t), W(s)]$, $s < t$. Justifique todos os procedimentos. (15)