LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Licenciatura MAEG, **Exame Época Normal**, 21/06/2016
Processos Estocásticos e Aplicações, 3^o ano, 2^o semestre

No decurso do exame não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Se tiver dúvidas, apresente-as por escrito no seu teste, para que as mesmas possam ser consideradas na correcção. `2h30m`**.**
Formalize e fundamente sempre as suas respostas.

1. Determinada empresa tem em funcionamento três máquinas para determinada operação. Em cada dia, uma máquina que esteja a funcionar avaria-se com probabilidade 1/2, independentemente das outras. No final de cada dia as máquinas avariadas são enviadas para reparação na oficina. Quando a oficina tem uma ou mais máquinas para reparar no início do dia repara apenas uma máquina, devolvendo-a no fim do dia, começando a laborar no início do dia seguinte.

   Considere o processo associado a X_n que representa o número de máquinas em bom estado no final do dia n, ou no início do dia $n+1$, depois de contabilizadas as avarias e reparações nesse dia. (50)

   (a) Descreva o modelo como uma cadeia de Markov homogénea e complete a matriz das probabilidades de transição P:
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & \;\;1 & \;\;2 & \;\;3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & 0 \\ 0 & & 1/2 & \\ & 1/4 & 1/2 & \\ 1/8 & 3/8 & & \end{pmatrix} \end{array}$$

   (b) Classifique os estados e calcule o período do estado 0, justificando.

   (c) Qual a probabilidade de não haver avarias nos primeiros dois dias de início de actividade da empresa (as máquinas são novas e funcionam).

   (d) Calcule a probabilidade de haver apenas um máquina a funcionar no final do segundo dia.

   (e) No longo prazo, qual a fração dias que começam com pelo menos uma máquina avariada?

2. Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson homogéneo com intensidade λ. Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo definido pela equação
$$X(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} I_j\,,$$
   com $I_j \frown B(1;\theta)$, $j = 1, 2, ...$, v.a.'s i.i.d. e independentes de $N(t)$. (50)

   (a) Deduza a função geradora de momentos de $X(t)$.

   (b) Identifique a distribuição de $X(t)$, justificando cuidadosamente.

   (c) Seja T uma variável aleatória, independente de $\{N(t)\}$, com distribuição Uniforme(0;1). Calcule $E[N(T)]$ e $V[N(T)]$.

3. Considere dois cabos trans-oceânicos de comunicações, identificados pelas letras A e B, que transmitem sinais de um lado para o outro do oceano e operam independentemente um do outro. Estimou-se que o tempo de funcionamento ininterrupto, até ocorrer avaria, de cada um dos cabos pode ser representado por uma distribuição exponencial de média 1. Assim que um dos cabos avaria é imediatamente iniciada a sua reparação. Os tempos de reparação são também independentes e seguem uma distribuição exponencial de média 1/2.

   Considere o processo $\{X(t), t \geq 0\}$, e seja $X(t)$ o número de cabos em funcionamento no instante t. Seja $P_{ij}(s, t+s) = Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$. (50)

   (a) Justifique que $P_{ij}(t, t+s) = P_{ij}(0, t) = P_{ij}(t)$. Interprete e identifique o processo em causa.

   (b) Escreva, justificando, a matriz geradora do processo, Q. Desenhe um grafo com as respectivas ligações.

   (c) Deduza a equação diferencial regressiva envolvendo $P'_{ij}(t)$.

   (d) Qual é a probabilidade de num determinado instante o processo transitar para o estado 2 partindo de 1. Justifique.

   (e) Calcule a distribuição estacionária do processo.

4. Considere que um determinado serviço de atendimento da Loja do Cidadão possui dois atendedores, aguardando os clientes numa fila única, se for caso disso. Chegam ao serviço para serem atendidos 80 clientes por hora e o tempo médio de serviço é de 1.2 minutos por cliente. Os tempos entre chegadas e os tempos de serviço são exponenciais. (15)

   (a) Determine o número médio de clientes presentes na fila.

   (b) Determine o tempo médio dispendido por cada visita ao serviço de atendimento.

5. Seja $\{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$ uma sucessão de v.a.'s positivas e i.i.d. com média finita e seja $X_n = X_0\xi_1\xi_2\dots\xi_n$. Seja $\xi_i = \exp(\eta_i)$ com $\eta_i \frown Normal(\mu, \sigma^2)$. Para que valores de μ e de σ $\{X_n\}$ é uma martingala? Justifique todos os procedimentos. (20)

6. Seja $\{B(t)\}$ um movimento Browniano standard e μ e σ (> 0) fixos. Considere o movimento Browniano com deriva $\{W(t)\}$, com $W(t) = \mu t + \sigma B(t)$. Calcule $E[W(t)]$ e $Cov[W(t), W(s)]$, $s < t$. Justifique todos os procedimentos. (15)