Frequência 2, 21/06/2016, Solução

1. Seja $X(t)$: nº cabos em funcionamento em t, $S=\{0,1,2\}$

(a) $P_{ij}(t,t+s) = P_{ij}(0,t) = P_{ij}(t)$, $i,j = 0,1,2$

No máximo estão 2 cabos a funcionar, no mínimo zero. Temos um processo de nascimento e morte homogéneo, os tempos de funcionamento e de reparação apenas dependem da amplitude ...

(b) Tempo de reparação de cada cabo tem distr. Exponencial(2)
Tempo de espera até avariar de cada cabo tem distr. Exponencial(1)

- Se estão 2 cabos avariados, 0 a funcionar, o processo muda de estado, logo que o 1º cabo comece a funcionar: $\min\{X_1,X_2\}$

$X_i \sim$ exponencial(2)

$\min\{X_1,X_2\} \sim \exp(4)$, $\lambda_0 = 2\times 2 = 4$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

- Se estão 2 cabos a funcionar, 0 avariados, o processo muda de estado logo que o primeiro avarie: $\min\{Y_1,Y_2\}$

$Y_i \sim$ exponencial(1) $\qquad \mu_2 = 2\times 1 = 2$

$\min\{Y_1,Y_2\} \sim \exp(2) \qquad \mu_1 = 1,\ \mu_0 = 0$

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

c) Equações de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{2} P_{ik}(t)P_{kj}(s) \overset{\text{ou}}{=} \sum_{k=0}^{2} P_{ik}(s)P_{kj}(t)$$

$$P_{ij}(t+s) = Pr[X(t+s)=j \mid X(0)=i] = \sum_{k=0}^{2} Pr[X(t+s)=j \mid X(0)=i, X(s)=k] \times P[X(s)=k \mid X(0)=i]$$

pelo teorema prob. total

$$= \sum_{k=0}^{2} Pr[X(t+s)=j \mid X(s)=k] \times P_{ik}(s)$$, Propriedade de Markov

$$= \sum_{k=0}^{2} P_{kj}(t)\, P_{ik}(s)$$, Processo homogéneo

Podemos fazer pelo esquema

(d) $P_{ij}(h+t) = \sum_{k=0}^{2} P_{ik}(h) P_{kj}(t) = P_{i0}(h) P_{0j}(t) + P_{i1}(h) P_{1j}(t) + P_{i2}(h) P_{2j}(t)$

$= \mu_{i0} P_{0j}(t) + \mu_{i1} P(t) + \mu_{i2} P_{2j}(t) + o(h)$

$P'_{0j}(t) = -\lambda_0 P_{0j}(t) + \lambda_0 P_{1j}(t)$

$P'_{ij}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t)$, $i \geq 1$

and replace λ_i, μ_i

(e) Exponencial de média $(\lambda+\mu)^{-1}$

(f) $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

(g) $\begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi Q = 0$ e $\sum \pi_i = 1$

$\begin{cases} -4\pi_0 + \pi_1 = 0 \\ \cancel{4\pi_0 - 3\pi_1 + 2\pi_2 = 0} \\ 2\pi_1 - 2\pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \pi_0 = 1/9 \\ \pi_1 = 4/9 \\ \pi_2 = 4/9 \end{cases}$

2. a) Modelo M|M|2 $\lambda = 80/60 = 4/3$ m , $\mu = 12^{-1} = 5/6$, $\lambda/\mu = 8/5$, $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = 4/5$

$\theta_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{8}{5}\right)^k$, $k = 1, 2$, $\theta_0 = 1$

$\pi_k = \theta_k \pi_0$ $\quad \pi_0 = \left(1 + \frac{8}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}\right)^2 \frac{1}{1-4/5}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{8}{5} + \frac{8^2}{10}\right)^{-1} = 1/9 = 0,(1)$

$L_q = \pi_2 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}\right)^2 \frac{1}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{\cancel{5^2}} = \frac{8^2 \times 2}{45} = 2.84(4)$

b) $W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{8^2 \times 2}{5 \times 9} \frac{3}{4} + \frac{6}{5} = 3\frac{1}{3}$ //

c) $\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 = \frac{1}{5}$ $\longrightarrow$ 20% do tempo.

3. $X_n = X_0 \prod_{i=1}^{n} \xi_i$, with $E[\xi_i] < \infty$ e ξ_i's i.i.d. , $\xi_i = e^{\eta_i}$, $\eta_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

1. $E[X_n] = X_0 \prod_{i=1}^{n} E[\xi_i] < \infty$

2. $E[X_{n+1} | H_n] = E[X_n \xi_{n+1} | H_n] = X_n E[\xi_{n+1}] = X_n E[e^{\eta_i}] = X_n M_\eta(1)$

$= X_n e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \Longrightarrow E[X_{n+1} | H_n] = X_n$ se $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$

4. $\mathrm{Cov}[W(t), W(s)] = E[W(t) W(s)] - \mu^2 t s$; $E[W(t)] = \mu t$ se $B(0) = 0$.

$E[W(t) W(s)] = \mu^2 s t + \mu\sigma t\, E[\cancel{B(s)}] + \mu\sigma s\, E[\cancel{B(t)}] + \sigma^2 \underbrace{E[B(t) B(s)]}_{s}$, se $B(0) = 1$, $V(B(t)) = 1$

$\Longrightarrow \mathrm{Cov}[W(t), W(s)] = \sigma^2 s$ //