ESTATISTICA I – 2º ano\2º semestre Economia
Exame Época Especial – **12/09/2016**

1ª Parte
(duração – 30 minutos)

Cotação da 1º Parte: 7 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____ Nº:________

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*.

1. Sejam A e B acontecimentos de um espaço Ω com probabilidade positiva.

	V	**F**
Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A-B) = P(A) \times P(\bar{B})$.	X	
Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.	X	
Se $A \subset B$, então $P(A\|B) \times P(B) = P(A)$	X	
Se $A \cup B = \Omega$ então os acontecimentos $\{A, B\}$ formam uma partição do espaço de resultados.		X

2. Seja X uma variável aleatória com função distribuição $F_X(x)$.

	V	F
Se X é uma variável aleatória contínua e ξ_α é o quantil de ordem α, então $P\left(\xi_{0.25} \leq X \leq \xi_{0.85}\right) = 0,6$	X	
Seja X uma variável aleatória discreta com função probabilidade $f(x)$. Se $F_X(1) = 1$, então $f(x) = 0$ para $x > 1$	X	
Se X é uma variável aleatória contínua, então $F_X(x)$ é uma função estritamente crescente.		X
Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então $0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.		X

3. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional.

	V	**F**
Se X e Y são identicamente distribuídas, então $Cov[X, Y] < Var(X)$		X
$E(X - Y) = E(X) + E(Y) - Cov(X, Y)$		X
Se (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com função probabilidade conjunta f(x, y), então $\forall (x, y) \in D_{X,Y}$ tem-se $f(x, y) \leq P(X = x)$	X	
Se X e Y são variáveis aleatórias independentes,então X^2 e Y^2 também o são.	X	

4. Considere duas amostras casuais, independentes, de dimensão $\boldsymbol{n}$ de uma população X com $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = Var(X)$. Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais

	V	F
$2\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = \mu$		X
$Var(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) = 2\sigma^2$		X
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2}{2\sigma} \sim N(0,1)$		X
$\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2}{2\sigma}$ é uma estatística.		X

<u>Atenção</u>: Das seguintes 3 questões <u>responda apenas a 2</u> (Resposta a 3 questões anula 2) [Cotação: 15+15].
Nas questões que se seguem, formalize e justifique todos os passos.

5. Sejam os acontecimentos $A, B, C \subset \Omega$ com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade: $P(A - B \mid C) = P(A).P(\bar{B})$.

$$P(A - B \mid C) = \frac{P[(A - B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) * P(C) - P(A) * P(B) * P(C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A) * P(C) * [1 - P(B)]}{P(C)} = \frac{P(A) * P(\bar{B}) * P(C)}{P(C)} = P(A) * P(\bar{B})$$

6. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra casual de dimensão $\boldsymbol{n}$ retirada de uma população X com função distribuição $F(x)$. Mostre que a função distribuição da amostra é dada por $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x)$.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overbrace{P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_i) * P\,(X_2 \le x) * \cdots ,* P(X_n \le x)}^{Porque\ X_{i\ (i=1,2,\cdots,n)}\ \text{são independentes}}$$

$$= \underbrace{F(x_1) * F(x_1) * \cdots * F(x_n) = F(x) * F(x) * \cdots * F(x)}_{Porque\ X_{i\ (i=1,2,\cdots,n)}\ \text{são identicamente distribuídas a}\ X} = \prod_{i=1}^{n} F(x)$$

7. Considere uma população X com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Mostre que a média de uma amostra de dimensão $\boldsymbol{n}$ tem $Var(\bar{X}) = {\sigma^2}/{n}$.

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \overbrace{\frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}^{Porque\ X_{i\ (i=1,2,\cdots,n)}\ \text{são independentes} \Rightarrow cov(X_i, X_j)=0\ i \ne j} = \frac{1}{n^2} n Var(X) = {\sigma^2}/{n}$$

Porque $X_{i\ (i=1,2,\cdots,n)}$ $\text{são identicamente distribuídas a } X$

ESTATISTICA I – 2º ano\2º semestre Economia
Exame Época Especial – **12/09/2016**

1ª Parte

ESTATISTICA I – 2º ano\2º semestre Economia
Exame Época Especial – **12/09/2016**

2ª Parte (13 valores)
(duração – 90 minutos)

<u>Atenção</u>: Nas questões de resposta aberta, formalize e justifique todos os passos.

Name:____Nº:__________

Espaço reservado para a classificação

1a.(20)	2a.(15)	2c. (10)	3a.(10)	4 (10)	**T:**
1b.(10)	2b.(20)		3b.(15)	5 (20)	**P:**
________	________	________	________	________	________

1. Na empresa de fundição Ferrobelo trabalha-se 5 dias por semana de segunda a sexta. O gestor dos recursos humanos constatou que a probabilidade de existirem problemas laborais e ser Segunda feira é de 10% e que a probabilidade de ser 6ª feira, tendo-se verificado problemas laborais é de 40%.
Verificou ainda que a probabilidade de existirem problemas laborais numa semana é de 25%.

a) Sabendo que em certo dia da semana se verificaram problemas laborais, qual a probabilidade de ter sido a uma 2ª feira?

$$P(2^{a}) = P(6^{a}) = \frac{1}{5}, P(3^{a}, 4^{a}, 5^{a}) = \frac{3}{5}; P(PL \cap 2^{a}) = 0.1, P(6^{a}|PL) = 0.4, P(PL) = 0.25$$

$$P(2^{a}|PL) = \frac{P(2^{a} \cap PL)}{P(PL)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$$

b) Num mês, qual a probabilidade de se terem verificado problemas laborais em mais de uma semana?

0.4199 ☐ 0.5781 ☐ 0.6834 ☐ 0.2617X

.

2. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional com função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}(3-x)y & \left(0<x<3, 0<y<\frac{2}{3}\right)\\ 0 & \text{for other } (x,y)\end{cases} .$$

a) Calcule o valor esperado de Y dado $x=2$.

$$f_X(x)=\int_0^{\frac{2}{3}}(3-x)y\ dy=(3-x)\frac{2}{9} \quad 0<x<3$$

$$E(Y|x=2)=\int_0^{\frac{2}{3}} y*\frac{(3-2)y}{\frac{2}{9}}\ dy=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{2}{3}} y^2dy=\frac{4}{9}$$

b) Seja a variável aleatória $W=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & 1\leq x<2\\ 2 & x\geq 2\end{cases}$. Classifique, justificando, a variável aleatória W.

$$F_X(x)=\int_0^x f_X(x)\,dx=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \frac{2}{3}x-\frac{x^2}{9} & 0<x<3\\ 1 & x\geq 3\end{cases}$$

$$D_W=\{0,1,2\}$$

$$A_0=\{x: w=0\}=\{x: x<1\}\underset{=}{\Rightarrow} P(W=0)=F_X(1)=\frac{5}{9}$$

$$A_1=\{x: w=1\}=\{x: 1\leq x<2\}\underset{=}{\Rightarrow} P(W=1)=F_X(2)-\ F_X(1)=\frac{8}{9}-\frac{5}{9}=\frac{3}{9}$$

$$A_2=\{x: w=2\}=\{x: x\geq 2\}\underset{=}{\Rightarrow} P(W=2)=\quad 1-F_X(2)=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$$

Então:

w:	0	1	2
$f_W(w)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

Pelo que se verifica que :

$$P(W=w)>0\ w\in\ D_W$$

E

$$\sum\nolimits_{w\in D_W} f_W(w)=1$$

E W é uma variável aleatória discreta.

c) Determine a $P(W < 1.5)$.

$$P(W < 1.5) = f_W(0) + f_W(1) = \frac{8}{9}$$

3. O número de visistas a determinado site segue um processo de Poisson com intensidade média de 10 por hora.

a) Calcule a probabilidade de terem passado mais de 5 minutos entre 2 visitas consecutivas.

0,5654 ☐ 0,4346 X 0,5134 ☐ 0,4866 ☐

b) Determine a probabilidade de terem decorrido mais de 2 horas até à ocorrência da 20ª visita.

X- número de visitas a determinado site por hora $\sim Po(10)$

Y- número de visitas a determinado site em 2 horas $\sim Po(20)$

$$P(Y < 20) = P(Y \leq 19) = 0.4703$$

Ou

Y- tempo, em horas, entre visitas consecuitivas $\sim Ex(10)$

W- tempo até à ocorrência da 20ª visita= $\sum_{i=1}^{20} Y_i \sim G(20,10) \Rightarrow 2 * \boldsymbol{\lambda} * \boldsymbol{W} \sim \boldsymbol{\chi^2_{(40)}}$

$$P(W > 2) = P(2 * \boldsymbol{\lambda} * \boldsymbol{W} \leq 2 * 10 * 2) = P\left(\boldsymbol{\chi^2_{(40)}} \leq 40\right) = 0.470$$

4. Com base em registos recolhidos em anos anteriores, sabe-se que a probabilidade de um indíviduo ter contraído uma doença rara chamada Sindrome de Nagy é de 0.005. Sabendo que existem 1200 residentes numa determinada região, utilize a lei dos fenómenos raros para calcular a probabilidade de menos de 5 pessoas residentes nessa região contraírem a doença?

0.4457 ☐ 0.2851X 0.1339 ☐ 0.1606 ☐

5. Tempo (em minutos) que um professor leva a corrigir um exame de Estatistica I é bem modelado por uma distribuição normal com média 15 e desvio padrão 3. Para uma amostra aleatória de dimensão 9, determine o limite superior para o tempo total que o professor levará a corrigir com uma probabilidade de 95%.

Y - tempo total correcção = $\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(9 * 15, 9 * 3^2)$

$$a: P(Y \leq a) = 0.95 \Rightarrow a = invnorm(0.95, 9 * 15, 9) = 149.8037$$

Ou $Z = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i - n*\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow z_{0.05}: P(Z > a) = 0.05 \Rightarrow z_{0.05} = 1.645 = \frac{a-135}{9} \Rightarrow a = 149.805$