Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTAS 2 e 3 [1]

(1) Usando o princípio de indução matemática, prove as seguintes proposições, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

(a) (soma dos primeiros n termos da progressão geométrica) para $r \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = r\frac{1-r^n}{1-r}.$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

(2) Seja $C = \{x \in \mathbb{R} \colon x(x^2-2) \leq 0\}$.

(a) Calcule o conjunto dos minorantes e dos majorantes de C.

(b) Indique, caso existam, o sup e o max de C e de $C \cap \mathbb{Q}$.

(3) Demonstre as seguintes igualdades:

(a) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

(b) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

(c) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) Determine o conjunto dos majorantes e minorantes dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ indicando, sempre que possível, o supremo e o ínfimo de cada um deles:

(a) $[0,2[\cup]3,5[\cup\{6,7\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 9\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x-3| \leq 5\}$

(d) $\left\{\dfrac{n+1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$

(e) $\left\{1 + (-1)^n \dfrac{n+2}{n+1} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} \colon (x-1)/(x+3) > x/(x-2)\}$

(g) $[1,2] \cap \mathbb{Q}$.

(5) Determine o interior, a fronteira e o conjunto derivado de cada um dos conjuntos do exercício anterior.

[1] As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *. A colaboração entre colegas é encorajada, mas cada estudante deve escrever as suas próprias soluções e compreendê-las.

(6) Dê um exemplo (ou prove que não existe) de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que seja
   (a) finito não vazio e aberto
   (b) fechado não limitado
   (c) igual ao derivado
   (d) igual à fronteira
   (e) finito não majorado

(7) Mostre que em $\mathbb{R}$ um conjunto aberto não pode ter nem máximo nem mínimo. *Sugestão*: Note que o supremo é um ponto na fronteira.

(8) (a) Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ é simultaneamente fechado e aberto sse $\operatorname{front} A = \emptyset$.
   (b) (*) Mostre que $\operatorname{front} A = \emptyset$ sse $A \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.