

Lista 3



Comece por provar que, dado $X \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e majorado, $s = \sup(X) \in fr(X)$. Para tal, suponhamos, com vista a um absurdo, que $s = \sup(X) \notin fr(X)$. Assim, temos que ter $s \in int(X)$ ou $s \in ext(X)$.

Se $s \in int(X)$ então, por definição de ponto interior, existe $\epsilon > 0$ tal que $]s - \epsilon, s + \epsilon[\subseteq X$. Em particular, $s + \epsilon/2 \in X$, o que é um absurdo, visto s ser o supremo (e portanto, **um majorante**) do conjunto X . Logo, $s \notin int(X)$.

Se $s \in ext(X)$ então, por definição de ponto exterior, existe $\epsilon > 0$ tal que $]s - \epsilon, s + \epsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus X$. Como, qualquer que seja $x \in X$, $x \leq s$, $]s - \epsilon, s[\subseteq \mathbb{R} \setminus X$ então, $s - \epsilon/2 \geq x$, para todo $x \in X$; o que é um absurdo, visto s ser o supremo (e portanto, **o menor dos majorante**) do conjunto X . Logo, $s \notin ext(X)$.

Portanto, $\sup(X) \in fr(X)$.

Assim, se X é um conjunto aberto temos que $X = int(X)$; como $\sup(X) \in fr(X)$ (e $int(X) \cap fr(X) = \emptyset$) então $\sup(X) \notin X$ e logo X não tem máximo.

Analogamente se provava para o mínimo.



Prova-se facilmente que se $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$ então $fr(X) = \emptyset$.

Resta-nos assim provar que $fr(X) = \emptyset \Rightarrow (X = \emptyset \text{ ou } X = \mathbb{R})$.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe $X \subseteq \mathbb{R}$, tal que $fr(X) = \emptyset$ e $X \neq \emptyset$ e $X \neq \mathbb{R}$.

Se $X \neq \emptyset$ então existe $x \in X$; Se $X \neq \mathbb{R}$ então existe $y \notin X$.

Como $fr(X) = \emptyset$ então X é um conjunto aberto (portanto todo o elemento de X é também um elemento de $int(X)$) e logo existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(x) =]x - \epsilon, x + \epsilon[\subseteq X$.

Suponhamos, s.p.d.g., que $x < y$ e consideremos o conjunto $W = \{\delta > 0 :]x, x + \delta[\subseteq X\}$.

W é um conjunto não vazio (pq $\epsilon \in W$) e é majorado (pq todo $\delta > d(x, y)$ já não pertence a W e é majorante de W). Logo, pelo axioma do supremo, W tem supremo (chamemos-lhe s).

Pensemos agora no elemento $x + s$; este tem q ser um elemento na fronteira de X (**justifique!**; se $x + s \in int(X)$ então...*absurdo*; se $x + s \in ext(X)$ então ...*absurdo*), o q é absurdo visto q esta é vazia. Assim, fica provado o pretendido.