**Instituto Superior de Economia e Gestão - Universidade de Lisboa**
**Licenciatura em MAEG**
**Análise Matemática I**
**1ºSemestre 2015/2016**
**Teste : 2 de Novembro de 2015**
**Duração: 1h15 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(6,5) 1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2x| < 1\}$ e $B = \{\frac{1}{n^2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Escreva o conjunto $A$ como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o supremo, ínfimo, máximo e mínimo, caso existam, do conjunto $B$.

(c) Calcule $int(A \cap \mathbb{Q})$, $fr(A \cap \mathbb{Q})$ e $B'$.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

i. $\exists b \in B : \forall x \in B, x \leq b$;

ii. $\forall a \in A \exists \epsilon > 0 : ]a - \epsilon, a + \epsilon[ \subseteq A$;

(3,5) 2. Calcule $\lim \left( \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4 + 1^2}} + \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4 + 2^2}} + \ldots + \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4 + n^2}} \right)$.

(4,0) 3. Utilizando o princípio de indução matemática prove que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(6,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **contínua em** $x = 1$, e tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & \text{se } x < -1 \\ \arccos(x) + k & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \arctan(x) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de $k$.

(b) Calcule $f\left(]-\infty, -1[\right)$ e $f\left([-1, 1]\right)$.

(c) Indique justificando o valor lógico da seguinte proposição

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$