

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

Alguns exercícios de exame: Topologia; Indução; Limites de sucessões

- (1) Considere os conjuntos $A = \{1 + (-1)^n + \frac{(-1)^n}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 5x \leq -6\}$.
- (a) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de A e, caso existam, o máximo e o mínimo de A .
- (b) Calcule o conjunto dos pontos de acumulação de A , o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cap B$ e o interior de $A \cup B$.

(Época Normal- Semestre 1- Jan2008)

- (2) (a) Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que $7^n - 1$ é um múltiplo de 6, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Sendo $A = \left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : \ln(1 + e^x) > 0\}$ indique o conjunto dos majorantes de A , o seu mínimo (caso exista) e a fronteira de $A \cap B$.

(Época de Recurso- Semestre 1- Jan2008)

- (3) Considere u_n a sucessão cujos primeiros termos são

$$1, \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 2, \frac{6}{7}, -\frac{6}{5}, 4, \frac{9}{10}, -\frac{9}{8}, 8, \frac{12}{13}, -\frac{12}{11} \dots$$

- (a) Escreva o termo de ordem geral da sucessão u_n e indique o conjunto dos sublimites de u_n .
- (b) Sendo $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x - \sqrt{2}) \geq 0\} \cap \mathbb{Q}$, indique, caso existam, o conjunto dos minorantes e majorantes de A , o interior e a aderência de B .

(Época Normal- Semestre 1- Jan2009)

- (4) Considere os conjuntos $A = \left\{ \frac{(-1)^n n^2 + 4}{2n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \frac{1}{2} \right\}$.
- (a) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de A e, caso existam, o máximo e o mínimo de A .
- (b) Calcule o conjunto dos pontos de acumulação de A , o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cap B$ e o interior de $A \cup B$.

(Época Normal - Semestre 1- Jan2010)

- (5) Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x + x^2| < 5\}$ e $B = \{e^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
- (a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.
- (b) Indique o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cap \mathbb{Q}$ e de $A \cap B$.
- (c) B é um conjunto fechado?
- (d) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists x \in B : x \leq b, \quad \forall b \in B;$$

(Época de Recurso - Semestre 2- Julho2013)

- (6) Prove, por indução matemática, que 5 é divisor de $2^{4n-2} + 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

(Época de Recurso - Semestre 2- Julho2013)