Lista 4

9.a) Por hipotese temos que $\lim x_n = a$ e que $\lim y_n = b$. Por definição de limite podemos afirmar que

$\forall \delta > 0\, \exists p : n > p \Rightarrow a - \delta < x_n < a + \delta$ e que $\forall \delta > 0\, \exists p : n > p \Rightarrow b - \delta < y_n < b + \delta$;

Como $a < b$ temos, em particular, $a \neq b$ e portanto podemos aformar que $d(a, b) > 0$;

Assim, escolhendo $\delta < \frac{d(a,b)}{2}$ sabemos que:

$\exists p_1 : n > p_1 \Rightarrow a - \delta < x_n < a + \delta \quad$ e $\quad \exists p_2 : n > p_2 \Rightarrow b - \delta < y_n < b + \delta$;

Logo, para $n > max\{p_1, p_2\}$, temos

$x_n < a + \delta < a + \frac{d(a,b)}{2} = b - \frac{d(a,b)}{2} < b - \delta < y_n$, $(\textit{para visualizar pode ajudar desenhar na recta real})$

o que termina a demonstração.

9.b) Por hipótese sabemos que $x_n < y_n$, para infinitos valores de n. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $a > b$. Aplicando o resultado provado na alínea anterior (com os "papéis" de a e b trocados:isto é, $b < a$) chegamos facilmente a um absurdo.