

Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2º Semestre 2015/2016
Teste intercalar: 5 de Abril de 2016
Duração: 1 hora

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(7,0) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x^2 - 4} < 0 \right\}$ e $B = \left\{ \ln \left(e + \frac{(-1)^{n(n+1)}}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$.

- (a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.
- (b) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de B .
- (c) Escreva a fronteira e o interior de $A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:
 - i. O conjunto $\mathbb{R} \setminus A$ é um conjunto compacto;
 - ii. $\forall a \in A \exists \epsilon > 0;]a - \epsilon, 2 + \epsilon[\subseteq A$;

(3,5) 2. Calcule o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos n}{n} + n \sin \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{3}{n!} \right)^{(n-1)!} - \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \right)$

(3,5) 3. Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(6,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em $x = 0$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0 \\ \arctan(x) + k & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Calcule o valor de k .
- (b) Indique $f] - \infty, 0[$ e os valores, caso existam, de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (c) Considere $k = 0$ e prove que existe $c \in] - 1, 1[: f(c) = \frac{1}{2}$.