Lista 5

5.b) Dado $a \in \mathbb{R}$, para que a função f seja contínua no ponto a, é preciso que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$;

Seja $a \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{x^2}{2}+2\right) = \frac{a^2}{2}+2$;

Quanto ao valor de $f(a)$ temos que distinguir 2 casos:

- Se $a \notin \mathbb{Z}$ então $f(a) = \frac{a^2}{2}+2$ e portanto, podemos concluir que f é contínua em a, para todo $a \notin \mathbb{Z}$;
- Se $a \in \mathbb{Z}$ então $f(a) = |1+a|+|1-a|$ e logo para que f seja contínua em $a \in \mathbb{Z}$ é preciso que $\frac{a^2}{2}+2 = |1+a|+|1-a|$. Como

$$|1+a| = \begin{cases} 1+a & \text{se } 1+a \geq 0\,(a \geq -1) \\ -1-a & \text{se } 1+a < 0\,(a < -1) \end{cases} \quad \text{e } |1-a| = \begin{cases} 1-a & \text{se } 1-a \geq 0\,(a \leq 1) \\ -1+a & \text{se } 1-a < 0\,(a > 1) \end{cases} \quad \text{então}$$

$$|1+a|+|1-a| = \begin{cases} -2a & \text{se } a < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq a \leq 1 \\ 2a & \text{se } a > 1 \end{cases}.$$

Assim, temos 3 casos a considerar:

- Se $a \in \mathbb{Z}$ e $a < -1$ então para que f seja continua em a temos que ter:
  $\frac{a^2}{2}+2 = -2a$ isto é, $a = -2$;
- Se $a \in \mathbb{Z}$ e $-1 \leq a \leq 1$ (isto é, $a \in \{-1,0,1\}$) então para que f seja continua em a temos que ter:
  $\frac{a^2}{2}+2 = 2$ isto é, $a = 0$;
- Se $a \in \mathbb{Z}$ e $a > 1$ então para que f seja continua em a temos que ter:
  $\frac{a^2}{2}+2 = 2a$ isto é, $a = 2$;

Logo, os pontos de descontinuidade da função são os elementos do conjunto $\mathbb{Z}\backslash\{-2,0,2\}$;