

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 7

(1) Mostre as seguintes proposições:

- (a) Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há, pelo menos, um zero da sua derivada.
- (b) Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo, não pode haver mais de um zero dessa função.
- (c) Se $f'(x) = 0$ para qualquer x num intervalo I , então f é constante em I .
- (d) Se f e g são funções diferenciáveis num intervalo I e $f' = g'$ em I , então $f - g$ é constante em I .

Sugestão: Use algum dos teoremas: Rolle, Lagrange (valor médio) ou Cauchy.

(2) (*) Prove que se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e existe uma sucessão $x_n \rightarrow 0$ estritamente decrescente tal que $f(x_n) = 0$, então $f^{(n)}(0) = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Use o teorema de Rolle.

(3) Use o teorema de Lagrange para mostrar as seguintes proposições:

- (a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
- (b) $\forall n \in \mathbb{N} \forall 0 \leq y \leq x : ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)$

(4) Calcule

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x + e^x)}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \log(x) \cdot \log(\log x)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$

(5) Determine qual

- (a) o rectângulo de perímetro 1 com maior área;
- (b) o rectângulo de área 1 com menor perímetro;
- (c) o cilindro de volume 1 com menor superfície de área.

(6) Escolha 3 das funções que se seguem para estudar quanto à monotonia e concavidades no seu domínio, e esboçar os respectivos gráficos:

(a) $f(x) = x^3 - 4x$

(b) $g(x) = \sqrt[5]{x}$

(c) $h(x) = x + 1/x$

(d) $\theta(x) = x\sqrt{1-x}$

(e) $\mu(x) = \log |\log x|$

(f) $h(x) = xe^{-1/x}$

(g) $\phi(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$