Lista 7

2. Comecemos por provar, por indução matemática, que, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, existe uma sucessão $w_n \to 0$ estritamente decrescente tal que $f^{(k)}(w_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   - Consideremos o caso $k = 1$:

     Sabemos, por hipótese, que existem $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots$ tais que $f(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, e porque a função é de classe C^∞, podemos, para cada $i \in \mathbb{N}$ aplicar o teorema de Rolle ao intervalo $[x_{i+1}, x_i]$ (note q, para cada i, estamos nas condições do teorema, visto que f de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ e $f(x_{i+1}) = f(x_i)$). Aplicando o teorema de Rolle a cada um dos intervalos obtemos, para todo $i \in \mathbb{N}$,

     $$\exists y_i \in]x_{i+1}, x_i[: \ f'(y_i) = 0.$$

     Isto é, existem $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ tais que $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$ e $f'(y_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Como temos para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} < y_n < x_n$, pelo teorema das sucessões enquadradas (note que, por hipótese, $\lim x_n = 0$), concluímos que $\lim y_n = 0$.

     Em resumo, provámos então que existe uma sucessão $y_n \to 0$, estritamente decrescente tal que $f'(y_n) = 0$ e concluímos a demonstração para $k = 1$.

   - Supondo agora que existe uma sucessão $w_n \to 0$ estritamente decrescente tal que $f^{(k)}(w_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, utilizando exactamento o mesmo raciocínio que fizemos para o caso $k = 1$ (substituindo o que ali aparece escrito para a função f pela função $f^{(k)}$ e o que aparece para a função f' pela função $(f^{(k)})'$, isto é, a função $f^{(k+1)}$) provamos que tem que existir uma sucessão $z_n \to 0$, estritamente decrescente tal que $f^{(k+1)}(z_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Consideremos então provado que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma sucessão $w_n \to 0$ estritamente decrescente tal que $f^{(k)}(w_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como sabemos que $f^{(k)}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ (visto que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$) podemos afirmar que

   $$\lim_{x \to 0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(0).$$

   Pela definição de limite segundo Heine, podemos concluir que, uma vez que $w_n \to 0$, $f^{(k)}(w_n) \to f^{(k)}(0)$ e logo (porque já provámos que $f^{(k)}(w_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$) concluímos que $f^{(k)}(0) = 0$, o que termina a nossa demonstração.