Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2016/2017
Teste intercalar: 5 de Novembro de 2017
Duração: 1h10m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(7,0) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : e^{|2x^2-3x|} \le e^2\right\}$ e $B = \left\{\frac{\cos(n\pi)(n^2+3)}{3n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de B.

(c) Escreva a fronteira de $A \cap \mathbb{Q}$ e o conjunto derivado de B.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\exists x \in B : x \le b, \ \forall b \in B$;

ii. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash A \ \exists \epsilon > 0 :]x-\epsilon, x+\epsilon[\subseteq \mathbb{R}\backslash A$;

(3,5) 2. Calcule $\lim \left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n^3+2}} + \ldots + \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n^3+n}}\right)$.

(3,5) 3. Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$n^3 + 3n^2 + 2n - 3 \text{ é um multiplo de 3}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(6,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $x = 0$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + k & \text{se } x < 0 \\ \arccos(1-x) & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de k.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Prove que existe $c \in]1,2[$ tal que $f(c) - c - 1 = 0$.