Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2015/2016
Época Normal: 11 de Janeiro de 2016
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{\ln(x^2+2)}{3-x^2} \leq 0 \right\}$ e $B = \left\{ e^{-n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

(a) Escreva o conjunto A com intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de B e, caso existam, o máximo e o mínimo de B.

(c) Escreva a fronteira de $A \cap \mathbb{Q}$ e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\forall a \in A \ \exists \epsilon > 0 :]a-\epsilon, a+\epsilon[\subseteq A$;

ii. $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{A}, \ \ (\exists \lim x_n \Rightarrow \lim x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{A})$;

(4,0) 2. (a) Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k\left(1+(-1)^k k\right) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Calcule a área da figura plana limitada por $y = \ln(x)$, $y = 1-x$ e $y = 1$.

(4,5) 3. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} b.\displaystyle\int_0^{x^2} \cos t \sqrt[3]{\sin t}\, dt & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ \ln\left(1+\ln(1+x)\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Indique, justificando, os valores de a e b de forma a que f seja contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Existem valores de a e b para os quais f é diferenciável no ponto $x = 0$?

(c) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(2,5) 4. Prove que $2x - 5 = \arctan(x)$ tem exatamente uma solução real.

(2,5) 5. Estude, em função do parâmetro $\alpha > 0$, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^2 \frac{\sin(x)\ln(3-x)}{\sqrt{4x^{\alpha+1} - x^{\alpha+3}}} dx.$$

(2,0) 6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ e suponhamos que existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{2n} = x_{2n-1} + \frac{1}{n}, \qquad f(x_{2n-1}) = 0 \ \text{ e } \ f(x_{2n}) = 1;$$

Prove que o intervalo $[1, +\infty[$ está contido no contradomínio de f'.