Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2014/2015
Época de Recurso: 28 de Janeiro de 2015
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : e^{-|x^2+x-1|} \geq e^{-5}\right\}$ e $B = \left\{\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o máximo e o mínimo, caso existam, dos conjuntos B e $A \backslash \mathbb{Q}$.

(c) B é um conjunto compacto? E A? Justifique.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\forall \epsilon > 0 :]-\epsilon, +\epsilon[\cap B \neq \emptyset$;

ii. $\forall x \in (\mathbb{R}\backslash A)\ \exists \epsilon > 0 :\ ]x-\epsilon, x+\epsilon[\subseteq (\mathbb{R}\backslash A)$;

(4,0) 2. (a) Utilizando o princípio de indução matemática, prove que $\frac{n^3 - n + 3}{3} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcule a área da figura plana limitada por $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$, $y = 0$ e o gráfico da função $f(x) = \ln(x-1)$.

(4,5) 3. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} \displaystyle\int_0^{2x} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{x^b} - 1}{x^b} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Determine, caso existam, os valores de a e de b para os quais se tem $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Considere $a = b = 1$ e indique, justificando,

i. o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\arcsin\left(\frac{-n}{n+1}\right)\right)$;

ii. o valor lógico das seguintes proposições:

A. $\forall x \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]\ f(x) \geq 0$;

B. $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [-\pi, 0]$.

(2,0) 4. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e $g'(x) > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mostre que a equação $g(x) = \arctan(x)$ tem exactamente uma solução real.

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x-1)\cos^2(x-1)}{(x^2-1)^\alpha \sqrt[2]{x^{\alpha+2} - x^{\alpha+1}}} dx.$$

(2,5) 6. Seja $f :]0,2[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]0,2[$ tal que $f\left(\frac{3}{n+2}\right) = 3 + f\left(\frac{3}{n+1}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Justifique.

(b) Mostre que existe uma sucessão $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f'(c_n) = -(n+1)(n+2)$.