Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2015/2016
Época de Recurso: 3 de Fevereiro de 2016
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{e^{|x^2-x|}} \geq e^{-1} \right\}$ e $B = \left\{ \ln\left(\frac{e^2}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de B e, caso existam, o máximo e o mínimo de B.

(c) Escreva a fronteira e o interior de $A \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\exists k \in A \cup B : k \geq x, \forall x \in A \cup B$;

ii. $\{x \in \mathbb{R} : (\exists \epsilon > 0 :]x-\epsilon, x+\epsilon[\subseteq B)\} \neq \emptyset$;

(4,0) 2. (a) Calcule o valor de $\lim_{n\to+\infty} \left(n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) + \left(\cos\frac{1}{n} + \frac{\sin n}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{(2n+1)!}\right)^{(2n-1)!} \right)$

(b) Calcule a área da figura plana limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}$.

(4,0) 3. Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + \sin^2(x-1)\right) & \text{se } x < 1 \\ k + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\, dt & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Indique, caso existam, os valores de k de forma a que f seja contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Existem valores de k para os quais f é diferenciável no ponto $x = 1$?

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x, y \geq 1,\ \ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y);$$

(2,5) 4. Seja f uma função real de variável real, diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e para a qual existem $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$, tais que $\frac{f^2(a)}{b^2} = \frac{f^2(b)}{a^2}$. Mostre que, se f não tiver zeros em $\mathbb{R}^+$, a equação $f(x) + xf'(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução positiva.

(2,5) 5. Estude, em função do parâmetro $\alpha > 0$, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{(1-\cos x)\tan(1-x)}}{x^\alpha(x^3-x^5)} dx.$$

(2,5) 6. Seja $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo o seu domínio tal que $\{x \in \mathbb{R} : g(x) = x\}$ é ilimitado. Mostre que se existir $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ então o valor deste limite tem que ser 1.