Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 10

(1) Calcule:
- (a) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}\,dx$
- (b) $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx$
- (c) $\int_{1/2}^e x\log x\,dx$
- (d) $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x\,dx$

(2) Mostre que existe uma única função $f \in C^0([0,1])$ satisfazendo

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt, \quad x \in [0,1].$$

(3) Seja $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_{2x}^{x+x^2} f(t)\,dt.$$

Justifique que φ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e mostre que $\varphi'(1) - \varphi(1) = f(2)$.

(4) Calcule
- (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^3\,dt}{x^4}$.
- (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^5\,dt}{\int_0^{x^2} \sin t^2\,dt}$.

(5) Considere $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\log t\,dt.$$

- (a) Mostre que φ é diferenciável e calcule φ'.
- (b) Estude a monotonia de φ e mostre que tem um único zero em $\mathbb{R}^+$.

(6) Calcule a área limitada pelas curvas definidas pelas seguintes equações:
$y = 18 - x^2$ e $y = x^2$

(7) Determine se os seguintes integrais convergem:
- (a) $\int_2^{+\infty} (x^2-3)^{-1}\,dx$
- (b) $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}|\sin(x)|\,dx$
- (c) $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+4x+1}{(x^2+3)^2(\sqrt{x}+1)}\,dx$

(d) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\, dx$
(e) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3-9x}\, dx$

(8) Estude, quanto à convergência, os seguintes integrais, em função do valor de α e β (sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$).
(a) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^4)^\beta} dx$;
(b) $\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} dx$;
(c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha+x^\beta} dx$;

Algumas soluções de exercícios da lista 10

1. a) $\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(21)$; b) $80/3 + \ln(3)$; c) $1/16 + e^2/4 + \ln(2)/8$; d) $5/24$;
4. a) $1/4$; b) $1/2$;
5. b) ϕ é monótona decrescente em $]0, 1[$ e monótona crescente em $]1, +\infty[$;
6. 72;
7. a) Conv; b) Conv; c) Conv; d) Div; e) Div;
8. a) $\beta > 1/2$; b) $\alpha > 1$ e $\beta > 0$; c) Conv sse $\max\{\alpha, \beta\} > 1$ e $\min\{\alpha, \beta\} < 1$;