ESTATÍSTICA II – Lic. Economia e Finanças

Avaliação intercalar

25 de Outubro de 2016 – Duração: 1h10m

Nome: ____ N.º: __________

Perguntas de escolha múltipla: cada resposta certa vale 10 pontos; cada resposta errada vale -2.5 pontos; assinale a resposta escolhida com uma cruz no quadrado adequado.
As cotações das restantes perguntas são indicadas no enunciado.

1. Os resultados líquidos das empresas de uma certa região, em milhares de euros, são bem modelados por uma distribuição normal de parâmetros desconhecidos. Recolhida uma amostra casual de 20 empresas desta região, observou-se uma média de 2.5 milhares de euros e uma variância de 25.

a) **[15]** Sabendo que os estimadores da máxima verosimilhança para a média e variância populacionais são respectivamente $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = S^2$, calcule a estimativa da máxima verosimilhança para a proporção de empresas desta região com resultado líquido positivo.

RESPOSTA:

Quer-se a estimativa de máxima verosimilhança para $P(X > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-\mu}{\sigma}\right)$, que é uma função biunívoca de μ e σ. Logo, pela propriedade da invariância dos estimadores MV obtém-se:

$$\hat{P}(X > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - \bar{x}}{\sqrt{s^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 2.5}{\sqrt{25}}\right) = 1 - \Phi(-0.5) =$$

$$= 1 - [1 - \Phi(0.5)] = \Phi(0.5) = 0.6915$$

b) Sabendo que $E(S^2) = \sigma^2[(n-1)/n]$, o que se pode afirmar quanto ao estimador da máxima verosimilhança para σ^2?

O estimador é centrado.	
O estimador não é centrado, tendo enviesamento positivo.	
O estimador não é centrado, tendo enviesamento negativo.	X
Nada se pode concluir quanto ao enviesamento do estimador.	

2. **[20]** Seja X uma variável aleatória da qual se sabe que:

$$E(X) = \frac{\theta}{2}; \quad Var(X) = \frac{\theta^2}{12} \quad (\theta > 0)$$

Com base numa amostra casual de dimensão n, obtenha o estimador de θ pelo método dos momentos e averigue a sua consistência.

RESPOSTA:

Estimador pelo método dos momentos:

$$\tilde{\theta} : E(X) = \bar{X} \Longleftrightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Longleftrightarrow \tilde{\theta} = 2\bar{X}$$

Tem-se que:

- $E(\tilde{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2 \times \dfrac{\theta}{2} = \theta$

- $\mathrm{Var}(\tilde{\theta}) = \mathrm{Var}(2\bar{X}) = 4\,\mathrm{Var}(\bar{X}) = 4\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{n} = \dfrac{4}{n} \times \dfrac{\theta^2}{12} = \dfrac{\theta^2}{3n}$

Condições suficientes para a consistência do estimador:

1. $\lim_{n \to +\infty} E(\tilde{\theta}) = \lim_{n \to +\infty} \theta = \theta$

2. $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{Var}(\tilde{\theta}) = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\theta^2}{3n} = 0$

Conclusão: o estimador $\tilde{\theta}$ é consistente para θ.

3. Admita que numa determinada cidade, o número de vezes que uma pessoa vai jantar fora por semana é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson de parâmetro λ desconhecido.

a) **[15]** Recolhida uma amostra casual de 50 pessoas, observou-se um total de 60 jantares fora. Com base nesta informação, construa um intervalo de confiança a 95% para o parâmetro λ. Interprete o resultado.

RESPOSTA:

Variável fulcral: $Z = \frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

$I.C. = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}\right)$, onde $\bar{x} = 60/50 = 1.2$ e $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

$\Rightarrow I.C. = \left(1.2 \pm 1.96\sqrt{\frac{1.2}{50}}\right) = (0.896; 1.504)$

Conclusão: com uma confiança de 95%, pode afirmar-se que o número médio de vezes por semana que uma pessoa desta cidade vai jantar fora se situa entre 0.896 e 1.504.

b) Com o objectivo de ter uma amplitude para o intervalo de confiança anterior igual a 0.5, mantendo o mesmo grau de confiança, decidiu-se aumentar a dimensão da amostra, tendo-se agora obtido uma média amostral de 1.3. Nestas condições, indique qual é a nova dimensão da amostra:

$n = 51$	
$n = 60$	
$n = 80$	X
$n = 100$	

4. **[20]** Uma associação de apoio ao consumidor pretende efectuar um estudo acerca da proporção consumidores que lê a lista de ingredientes dos produtos alimentares. Para tal, admita que foi recolhida uma amostra casual de 200 consumidores, dos quais 105 afirmaram ler os rótulos das embalagens. Será possível afirmar que mais de metade dos consumidores lê a lista de ingredientes? Justifique efectuando um teste de hipóteses com um nível de significância de 5%.

RESPOSTA:

Seja X uma v.a. tal que $X = 1$ se o consumidor lê a lista de ingredientes, e $X = 0$ caso contrário. Portanto $X \sim Bernoulli(\theta)$, onde θ representa a proporção, na população, de consumidores que lêem a lista de ingredientes. A hipótese a testar será então:

$$H_0 : \theta \leq 0.5 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta > 0.5$$

Sob H_0,

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

e a região crítica será: $W_{5\%} = \{z : z > 1.645\}$. Com $n = 200$ e $\sum x_i = 105$ tem-se $\bar{x} = 105/200 = 0.525$, portanto o valor observado é:

$$z_{\text{obs}} = \frac{0.525 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{200}}} \approx 0.7071$$

Como $z_{\text{obs}} \notin W_{5\%}$, não se rejeita H_0 a 5%: não há evidência contra a proporção de consumidores que lêem o rótulo ser inferior ou igual a 0.5; logo, não se pode afirmar que mais de metade dos consumidores lêem a lista de ingredientes.

5. Ao efectuar-se um teste de hipótese simples contra uma alternativa simples com uma dimensão de 10%, está a assumir-se que:

quando H_0 é falsa, a probabilidade de H_0 ser rejeitada é igual a 0.1.	
quando H_0 é verdadeira, a probabilidade de H_0 ser rejeitada é igual a 0.1.	X
quando H_0 é verdadeira, a probabilidade de H_0 não ser rejeitada é igual a 0.1.	
quando H_0 é falsa, a probabilidade de H_0 não ser rejeitada é igual a 0.1.	