

Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG

Ficha de exercícios nº 5

Limites e Continuidade de Funções em \mathbb{R}^n

Exercício 1 Calcule ou prove que não existem os limites das seguintes funções nos pontos indicados:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x-1}{y-x+1}$
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y^2}{x-y}$
- d) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{x+y-2}{xyz}$
- e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$
- f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1}$
- g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$
- h) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,1)} \frac{y^2}{x} (z+3) \text{sen}(4x)$
- i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$
- j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\text{sen}(\log(x+y))}$
- k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2-y^2-1}{x-1}$
- l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2+(y-1)^2}$
- m) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{z+(x-1)z+z^2}{1-xy+zx}$.

Exercício 2 Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = (x^2 + y) \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$.

- a) Justifique que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ e não existe $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.
- b) Prove que existe limite da função no ponto $(0, 0)$ e conclua que pode existir limite de uma função num ponto sem que existam os limites iterados.

Exercício 3 Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:

$$\begin{aligned}
 a) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (0, 0). \\
 b) g(x, y) &= \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^2}{(x-1)^2 + y^2} + y & \text{se } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (1, 0). \\
 c) h(x, y) &= \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (0, 0).
 \end{aligned}$$

Exercício 4 Determine o valor do parâmetro real α de modo que a seguinte função tenha limite no ponto $(1, 1)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x + y} + \alpha & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} - \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 5 Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{x + y}$.

a) Para cada $m \in \mathbb{R}$ e cada $k \in \mathbb{N}$ seja $A_{k,m} = \{(x, y) \in D_f : y = mx^k\}$. Calcule para cada par (k, m) o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto $A_{k,m}$.

b) Considere o conjunto $X = \{(x, y) \in D_f : y = -x + x^2\}$ e calcule o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto X .

c) Que pode concluir sobre a existência de limite de f no ponto $(0, 0)$?

Exercício 6 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{|x^2 + y^2 - 4|}} & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \\ 5 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} .$$

Determine o valor de k de modo a que a função seja contínua em \mathbb{R}^2 .

Exercício 7 Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade a \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}
 a) f(x, y) &= \frac{x^3}{x^2 + y^2} \\
 b) f(x, y) &= \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\
 c) f(x, y) &= \frac{x - y}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} \\
 d) f(x, y) &= x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)
 \end{aligned}$$

Exercício 8 Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$.

A função pode ser prolongável por continuidade a \mathbb{R}^2 ? Em caso afirmativo determine o prolongamento contínuo de f .

Exercício 9 Determine os pontos de descontinuidade das funções assim definidas:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1 + y & \text{se } x = 0 \\ y & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = (y^2 - 4y + 3) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Exercício 10 Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) =$

$$\sqrt{\frac{x(2 - \operatorname{sen} x)}{1 - |y|}}.$$

- Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.
- Justifique se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0, 1)$.