



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 4 de Junho de 2015

Duração: 2 horas

I

1. (2,5) Resolva o PVI $\begin{cases} xe^{x^2}x' - \frac{t}{1+t^2} = 0 \\ x(1) = 2 \end{cases}$.

2. Considere a seguinte equação diferencial de 3^a ordem

$$x'''+x''-2x'=0.$$

- a) (1,5) Para que condições iniciais $x(0)$, $x'(0)$ e $x''(0)$, existe uma solução não nula, $x(t)$, limitada para $t \geq 0$.
- b) (2,0) Obtenha o sistema de EDOs equivalente à equação dada, e mostre

que $\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t & e^{-2t} \\ 0 & e^t & -2e^{-2t} \\ 0 & e^t & 4e^{-2t} \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental de soluções para o

sistema obtido.

- c) (2,0) Determine e^{At} , onde A é a matriz associada ao sistema, e calcule a solução do sistema que verifica a condição inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ e $z(0) = -1$.

3. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x' = -y^2 + x \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \\ y' = xy + y \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

- a) (1,0)** Mostre que $(\sqrt{k\pi}, 0)$ são soluções de equilíbrio do sistema, com $k \in \mathbb{Z}^+$.
- b) (2,5)** Classifique os referidos pontos de equilíbrio quanto à estabilidade.

II

Considere o operador diferença Δ , definido por $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$. Atenda à seguinte

Definição: Se $\Delta X_n = x_n$, define-se **operador antidiferença de x_n** , e representa-se por

$$\Delta^{-1} x_n, \quad \Delta^{-1} x_n = X_n + C, \text{ com } C \in \mathfrak{R}.$$

- a) (1,0)** Mostre que $\Delta \Delta^{-1} = I$ e $\Delta^{-1} \Delta \neq I$.
- b) (1,5)** Calcule os operadores diferença e antidiferença da sucessão $u_n = a^n$, $n \in N$ e $a \neq 1$.

- c) (2,0)** Com base na alínea anterior resolva o PVI $\begin{cases} \Delta x_n = (-2)^n \\ x(1) = \frac{2}{3} \end{cases}$.

III

Seja a função complexa de variável complexa, $f(z) = \frac{1}{z^3 - 3z^2 + 7z - 5}$.

- a) (1,5)** Determine e classifique as singularidades da função.
- b) (2,5)** Calcule o valor do integral $\int_{|z|=2} f(z) dz$, mostrando que ambos os teoremas, Fórmulas Integrais de Cauchy e Resíduos de Cauchy, são aplicáveis, justificando convenientemente.

fim