

SOLUÇÕES
ANÁLISE MATEMÁTICA IV
 Licenciatura MAEG
Época Normal – 7 de Junho de 2016

I

1a) $(x^2 - 1) \underset{M(t,x)}{\overrightarrow{se}}nt - x \underset{N(t,x)}{\overrightarrow{co}}s t x' = 0$, a equação não é exacta porque

$\frac{\partial M}{\partial x} = 2x \overrightarrow{se}nt \neq \frac{\partial N}{\partial t} = x \overrightarrow{se}nt$. Um factor integrante é, por exemplo,

$$\mu(t) = C|\cos t| = \cos t \text{ com } t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $(1 - x^2)\cos^2 t = 0$, como $\overline{N}(t, x(t)) = -x \cos^2 t$ anula-se em $t = \pm \frac{\pi}{2}$, então o

intervalo máximo de existência da solução única é $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ao qual pertence o

instante inicial, pois nestes pontos fronteiros é atingida a fronteira do domínio de definição da função $f(t, x(t))$.

2a) $\alpha = -6$.

b) $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - \frac{e^{2t}}{4} \arctg(e^{2t}) - \frac{e^{4t}}{8} \log(1 + e^{-4t})$, $C_1, C_2 \in \mathfrak{R}$.

3a) $(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $(0, k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ são pontos de sela logo instáveis.

c) $\begin{cases} x(t) = -e^{1-t} \\ y(t) = e^{1-t} \end{cases}$.

II

- a) seja x_n a dimensão da população no final do ano $1970+n$, $x_0 = 50 \times 10^3$ e $x_{10} = 75 \times 10^3$. A equação é $x_{n+1} = kx_n$ cuja solução geral é $x_n = Ck^n$ com $C \in \mathfrak{R}$. Para encontrar o valor de k considera-se o

$$PVI \begin{cases} x_{n+1} = kx_n \\ x_0 = 50 \times 10^3 \end{cases} \text{ e obtém-se } k = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{10}}. \text{ A solução do PVI é}$$

$$x_n = 50 \times 10^3 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{10}}.$$

- b) $x_{50} = 50 \times 10^3 \left(\frac{3}{2}\right)^5$ representa a dimensão da população no final do ano 2020.

III

- a) As singularidades são $z = 2i$ e $z = -2i$, ambas são pólos simples.
- b) $\operatorname{Re} s(f, 2i) = \left(1 - \frac{i}{4}\right)e^{-6}$.
- c) $z = \pm 2i \in \operatorname{int} \gamma$ onde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |i - z| = 4\}$ é uma curva de Jordan regular, e f é holomorfa no simplesmente conexo $A = \{z \in \mathbb{C} : |i - z| < 5\}$.

Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\int_{|i-z|=4} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} s(f, z_j) = 2\pi i \left[\left(1 + \frac{i}{4}\right)e^6 + \left(1 - \frac{i}{4}\right)e^{-6} \right].$$