Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG

Ficha de exercícios n^o 7

Análise Complexa

Exercício 1 *Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:*
a) $z^3 + iz^2 - iz + 1 = 0$
b) $z^7 + z^4 - 16z^3 - 16 = 0$

Exercício 2 *Mostre que para qualquer número complexo z se tem $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. Indique exemplos de números complexos que verifiquem a igualdade.*

Exercício 3 *Represente graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$ e diga se são abertos, fechados e limitados.*
a) $\left\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 16\right\}$
b) $\left\{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 4\right\}$
c) $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| > |z-1+i|\}$
d) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$
e) $\left\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, |\arg z| < \frac{\pi}{4}\right\}$
f) $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 0\right\}$

Exercício 4 *Determine a parte real e a parte imaginária das funções:*
a) $f(z) = \frac{z+2}{z-1}$
b) $f(z) = 3i\bar{z} + 4(i+z)$

Exercício 5 *Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:*
a) $e^z = 1 + i$
b) $e^z = -1$
c) $\cos z = 2$
d) $e^z = e^{iz}$

Exercício 6 *Considerando $z = x + iy$, calcule os seguintes limites:*
a) $\lim\limits_{z \to -1+2i} \left(3xy + i\,(x-y)^2\right)$
b) $\lim\limits_{z \to 1+i} \frac{z^2-5}{iz}$
c) $\lim\limits_{z \to i} \frac{z(z^2+1)}{z-i}$
d) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{1-\cos z}{sen(z^2)}$

Exercício 7 *Determine o maior subconjunto de* $\mathbb{C}$ *onde as seguintes funções são contínuas:*

a) $f(z) = \log(z+1-i)$

b) $f(z) = \sqrt{1+z^2}$

c) $f(z) = \frac{e^{z+1}}{z^2+z+1}$

Exercício 8 *Mostre que* f *é contínua no ponto* z_0 *sse* $\overline{f}$ *é contínua nesse ponto.*

Exercício 9 *Verifique se as seguintes funções podem ser prolongadas por continuidade à origem:*

a) $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$

b) $g(z) = \frac{z}{|z|}$

Exercício 10 *Considere a função*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & se \quad z \neq 0 \\ 0 \quad se & z = 0 \end{cases} .$$

Prove que:

a) Não existe $\lim\limits_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}$

b) Se $\operatorname{Re} f = u$ *e* $\operatorname{Im} f = v$*, então* $u(x,0) = x$ *e* $v(0,y) = y$*.*

Exercício 11 *Seja* $f(x+iy) = \left(x^2+2y\right) + i\left(x^2+y^2\right)$*. Diga em que pontos* $z_0 = x_0 + iy_0$ *existe* $f'(z_0)$*.*

Exercício 12 *Considere* $f(x+iy) = x^2 - xy - y^2 + iv(x,y)$ *uma função inteira. Determine* $f(z)$ *e* $f'(z)$*.*

Exercício 13 *Mostre que uma função inteira não pode ter parte real* $u(x,y) = x^2 + y^2$*.*

Exercício 14 *Obtenha as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.*

Exercício 15 *Determine o maior subconjunto de* $\mathbb{C}$ *onde as seguintes funções são diferenciáveis:*

a) $f(x+iy) = -\left(e^y - e^{-y}\right)\cos x + i\left(e^y + e^{-y}\right) sen x$

b) $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z^2|}$

Exercício 16 *Determine* $u(x,y)$ *de modo que* $f(x+iy) = u(x,y) + i(x^3+y^3-3x^2y-3xy^2)$ *seja uma função inteira e* $f(0) = 0$*.*

Exercício 17 *Sejam* $u_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *(com* $k \in \mathbb{N}_0$*) funções definidas por* $u(x,y) = x^k - y^k$*. Calcule os valores de* k *para os quais existem funções* f_k *holomorfas tais que* $\operatorname{Re}(f_k) = u_k$ *e determine-as.*

Exercício 18 *Determine as funções harmónicas conjugadas de* $w(x,y) = x^2 - 3x - y^2$.

Exercício 19 *Considere* $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$.

a) Mostre que u *é uma função harmónica*

b) Determine uma função holomorfa f *tal que* $\operatorname{Re} f = u$ *e* $f(0) = 2i$.

Exercício 20 *a) Prove que* $u(x,y) = e^{-x}\,(x\operatorname{sen}y - y\cos y)$ *é uma função harmónica*

b) Determine $v(x,y)$ *tal que* $f(z) = u + iv$ *seja holomorfa*

c) Determine $f(z)$ *e calcule* $f'(2+i)$

Exercício 21 *Prove que uma função* f *é holomorfa sse* $\dfrac{df}{d\bar{z}} = 0$.

Exercício 22 *Seja* f *uma função complexa de variável complexa holomorfa no aberto* Ω, *e seja* $\bar{\Omega} = \left\{\bar{z} : z \in \Omega\right\}$. *Seja* $g : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ *a função definida por* $g(z) = \overline{f\left(\bar{z}\right)}$. *Prove que* g *é holomorfa.*