PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E APLICAÇÕES

EXERCÍCIOS

JOSÉ PEDRO GAIVÃO

Exercício 1. Seja $\Omega = \{0, 1, 2\}$ e considere a família de variáveis aleatórias $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$X_t(\omega) = \omega t, \quad t \geq 0.$$

(1) Classifique o processo estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ indicando o conjunto dos parâmetros T e o conjuntos dos estados E.
(2) Determine todas as realizações do processo.
(3) Calcule $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$ e $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 1)$.

Solução:

(1) $T = E = [0, \infty[$, portanto é um processo estocástico contínuo a tempo contínuo.
(2) $t \mapsto 0$, $t \mapsto t$ e $t \mapsto 2t$.
(3) $\{X_1 = 1\} = \{1\}$ e $\{X_2 = 1\} = \emptyset$. Logo $\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \emptyset$ e $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0$. Como $\{X_2 = 2\} = \{1\}$, temos que $\mathbb{P}(X_2 = 2, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)$. Logo,

$$\mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 2, X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = 1)} = 1.$$

Exercício 2. Seja $(\xi_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias de Bernoulli independentes e

$$X_n = \min\{k \geq 1 : \xi_1 + \cdots + \xi_k = n\}, \quad n \geq 1.$$

(1) Supondo que ξ_n representa o resultado (sucesso ou insucesso) de uma experiência aleatória, descreva o significado da variável aleatória X_n. Que valores pode tomar?
(2) Classifique o processo estocástico $\{X_n : n \geq 1\}$ indicando o conjunto dos parâmetros T e o conjunto dos estados E.
(3) Determine a distribuição de probabilidade de X_n.
(4) Calcule $\mathbb{P}(X_3 = x_3|X_2 = x_2)$.

Solução:

(1) X_n representa o número mínimo de experiências de Bernoulli tal que no total se observaram n sucessos. X_n toma valores inteiros $k \geq n$.
(2) $T = E = \mathbb{N}$, logo é um processo estocástico discreto a tempo discreto.

(3) Seja $p = \mathbb{P}(\xi_n = 1)$. Então,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = C_{n-1}^{k-1} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k \geq n.$$

(4) Suponhamos que $x_3 > x_2$ (caso contrário a probabilidade é zero). Então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = x_3 | X_2 = x_2) &= \mathbb{P}(\min\{k \geq 1\colon \xi_1 + \cdots + \xi_k = 3\} = x_3 | X_2 = x_2) \\
&= \mathbb{P}(\min\{k \geq x_2 + 1\colon \xi_{x_2+1} + \cdots + \xi_k = 1\} = x_3 | X_2 = x_2) \\
&= \mathbb{P}(\min\{k \geq x_2 + 1\colon \xi_{x_2+1} + \cdots + \xi_k = 1\} = x_3) \\
&= \mathbb{P}(\min\{k \geq 1\colon \xi_1 + \cdots + \xi_k = 1\} = x_3 - x_2) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = x_3 - x_2) \\
&= p(1-p)^{x_3 - x_2 - 1}
\end{aligned}$$

Exercício 3. Uma empresa produz diariamente N componentes electrónicas, onde N é uma variável aleatória com distribuição de Poisson e parâmetro $\lambda > 0$. Cada componente pode ter um defeito, independentemente das restantes, com probabilidade p. Supomos também que o defeito de cada componente é independente do número N de componentes electrónicas. Seja D o número diário de componentes electrónicas com defeito. Determine:

(1) $E(D|N = n)$
(2) $E(D)$
(3) $E(N|D = d)$

Solução:

(1) Seja $D = \xi_1 + \cdots + \xi_N$ onde ξ_n são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli. Então:

$$\begin{aligned}
E(D|N = n) &= E(\xi_1 + \cdots + \xi_N | N = n) \\
&= E(\xi_1 + \cdots + \xi_n | N = n) \\
&= E(\xi_1 + \cdots + \xi_n) \\
&= np.
\end{aligned}$$

De facto, $\mathbb{P}(D|N = n)$ é a distribuição Binomial(n,p).

(2)

$$E(D) = \sum_{n=0}^{\infty} E(D|N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} np\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p\lambda$$

(3) Usando a lei de probabilidade total mostramos que $D \sim \text{Poisson}(\lambda p)$. Logo,

$$\begin{aligned} E(N|D=d) &= \sum_{n=d}^{\infty} n\mathbb{P}(N=n|D=d) \\ &= \sum_{n=d}^{\infty} n\mathbb{P}(D=d|N=n)\frac{\mathbb{P}(N=n)}{\mathbb{P}(D=d)} \\ &= (1-p)\lambda + d \end{aligned}$$

Exercício 4. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com estados $S = \{0,1,2\}$ tem a seguinte matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(1) $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_1 = 0)$
(2) $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 0)$
(3) $\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 0)$

Solução:

(1)

$$\mathbb{P}(X_3 = 1|X_1 = 0) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} = 0.27$$

(2) Porque a cadeia é homogénea, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 0) = 0.27$.
(3)

$$\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) * 0.1 * 0.2$$

Exercício 5. Considere um modelo de aprovisionamento (descrito no Exemplo 3.11 do texto de apoio) onde apenas 0, 1, ou 2 artigos são procurados em cada período ($a_k = 0$ para $k \geq 3$) com probabilidade

$$\mathbb{P}(\xi_n = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 1) = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\xi_n = 2) = \frac{1}{10}.$$

Suponha que $s = 0$ e $m = 2$.

(1) Determine a matriz de transição de probabilidades P para a cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ onde X_n é o número de artigos em stock no fim do período n. (Dica: $S = \{2, 1, 0, -1\}$.)
(2) Calcule $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 2|X_0 = 0)$.
(3) Calcule $\mathbb{P}(X_3 = 0|X_1 = 1)$.

Solução:

(1) Ordenando as colunas e linhas da matriz segundo $\{2, 1, 0, -1\}$,

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/5 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/5 & 1/10 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 2 | X_0 = 0) = P_{0,2} P_{2,1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

(3)

$$\mathbb{P}(X_3 = 0 | X_1 = 1) = P^{(2)}_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 2/5 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/10 \\ 2/5 \\ 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$$

Exercício 6. Considere uma cadeia de Markov homogénea com estados $S = \{0, 1\}$ e matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < q < 1.$$

(1) Mostre por indução que

$$P^n = \frac{1}{p+q} \left(\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} \right), \quad n \geq 1.$$

(2) Determine se os estados são recorrentes ou transientes.
(3) Calcule

$$\pi_i = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = 0), \quad i \in \{0, 1\}.$$

(4) Mostre que

$$\pi = \pi P$$

onde π é o vector linha formado por π_0 e π_1 calculados na alínea anterior.

Solução:

(1) Seja $A = \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$ e $B = (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$. Temos que $PA = A$ e $PB = (1-p-q)B$.

(2)

$$\pi_0 = \frac{q}{p+q} \quad \text{e} \quad \pi_1 = \frac{p}{p+q}.$$

(3) Simples de verificar.

Exercício 7. Uma urna contém inicialmente duas bolas, uma branca e outra preta. Uma bola é retirada ao acaso e substituída por uma bola de cor oposta. O processo é repetido um número infinito de vezes. Seja X_n o número de bolas brancas na urna no instante $n \geq 0$.

(1) Mostre que X_n é uma cadeia de Markov homogénea e determine a matriz de transição P.
(2) Calcule P^n.
(3) Suponhamos que inicialmente a urna contém duas bolas brancas. No passo seguinte, uma bola branca é substituída por uma preta e por aí adiante. Determine a probabilidade de reencontrar ao longo do processo duas bolas brancas na urna.

Solução:

(1) Note-se que $S = \{0, 1, 2\}$. Como

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{se } X_n = 0 \\ X_n + \xi_{n+1} & \text{se } X_n = 1 \\ X_n - 1 & \text{se } X_n = 2 \end{cases}$$

onde ξ_n são variáveis de Bernoulli (simétricas) iid, temos que $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov homogénea e

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^3 = P.$$

(3)

$$\mathbb{P}(X_n = 2 \text{ para algum } n \geq 1 | X_0 = 2) = 1$$

porque o estado 2 é recorrente, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{2,2}^{(n)} = +\infty.$$

Exercício 8. Construa uma cadeia de Markov homogénea onde $P_{i,i}^{(Per(i))} = 0$ para algum estado i da cadeia.

Solução: Seja

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Temos que $P_{0,0} = 0$ e $P_{0,0}^{(n)} > 0$ para todo $n \geq 2$. Logo o estado 0 é aperiódico ($Per(0) = 1$) e $P_{0,0}^{(Per(0))} = 0$.

Exercício 9. Mostre que se $P_{i,i} > 0$, então o estado i é aperiódico.

Solução: Segue da equação de Chapman-Kolmogorov que $P_{i,i}^{(n)} \geq P_{i,i}^n > 0$ para todo $n \geq 1$. Portanto i é aperiódico.

Exercício 10. Mostre que se $i \leftrightarrow j$, então $Per(i) = Per(j)$.

Solução: Segue da definição de comunicação de estados que $i \leftrightarrow j$ sse $P^{(n)}_{i,j} > 0$ e $P^{(m)}_{j,i} > 0$ para algum $n, m > 0$. Seja $d_i = Per(i)$ e $d_j = Per(j)$. Da equação de Chapman-Kolmogorov tem-se

$$P^{(m+k+n)}_{j,j} \geq P^{(m)}_{j,i} P^{(k)}_{i,i} P^{(n)}_{i,j}$$

Assim, quando $k = 0$, temos que $P^{(0)}_{i,i} = 1$ e portanto $P^{(m+n)}_{j,j} > 0$. Logo d_j divide $m+n$. Por outro lado, se $P^{(k)}_{i,i} > 0$ então d_j divide $m+k+n$, logo divide também k. Conclusão, d_j divide d_i. De forma análoga se demonstra que d_i divide d_j. Logo $d_i = d_j$.

Exercício 11. É possível construir uma cadeia de Markov homogénea com espaço de estados finito e um estado recorrente nulo? e todos os estados transientes? Justifique.

Solução: Não. Todos os estados recorrentes de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito são positivos. Também não é possível construir uma cadeia de Markov com espaço finito tendo apenas estados transientes, uma vez que toda a cadeia com um número finito de estados tem pelo menos um estado recorrente.

Exercício 12. Determine a decomposição dos estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ da cadeia de Markov homogénea com a seguinte matriz de transição e calcule $m_i = E(T_i | X_0 = i)$ para todo $i \in S$,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$S = \{0\} \cup \{1\} \cup \{3\} \cup \{2, 4\} \cup \{5\}$$

As classes $\{2, 4\}$ e $\{5\}$ são fechadas, logo compostas por estados recorrentes positivos. As restantes classes são abertas, logo formadas por estados transientes. Relativamente aos tempos médios de reentrada $m_i = E(T_i | X_0 = i)$, vemos que $m_0 = m_1 = m_3 = +\infty$ uma vez que os estados 0, 1 e 3 são transientes. No caso dos estados 2, 4 e 5 podemos calcular sem dificuldade,

$$\mathbb{P}(T_2 = n | X_0 = 2) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases},$$

$$\mathbb{P}(T_4 = n|X_0 = 4) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases}$$

e

$$\mathbb{P}(T_5 = n|X_0 = 5) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}.$$

Assim,

$$m_2 = 2, \quad m_4 = 2 \quad \text{e} \quad m_5 = 1.$$

Exercício 13. Determine e classifique todas as classes de comunicação e período de cada classe para a cadeia de Markov homogénea com estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Calcule $m_5 = E(T_5|X_0 = 5)$.

Solução:

$$S = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\}.$$

A classe $\{2, 3, 4, 5\}$ é fechada, portanto é formado por estados recorrentes positivos. As classes $\{0\}$ e $\{1\}$ são abertas, logo 0 e 1 são transientes. Para calcular m_5 determinamos a distribuição de T_5,

$$\mathbb{P}(T_5 = n|X_0 = 5) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n = 1, 3, 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Assim, $m_5 = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = 3$.

Exercício 14. Determine as distribuições estacionárias das cadeias de Markov com matrizes de transição:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Solução: Um distribuição estacionária π é solução do sistema $\pi = \pi P$. Relativamente à primeira matriz de transição obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_0 \\ \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 + \pi_4 = \pi_2 \\ 0 = \pi_3 \\ \pi_2 = \pi_4 \\ \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_3 + \pi_5 = \pi_5 \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se $\pi_0 = \pi_1 = \pi_3 = 0$ e $\pi_2 = \pi_4$. Como $\pi_2 + \pi_4 = 1$ temos que $\pi_2 = \pi_4 = \frac{1}{2}$.

Relativamente à segunda matriz de transição temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_0 = \pi_0 \\ 0 = \pi_1 \\ \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_5 = \pi_2 \\ \pi_2 + \frac{1}{3}\pi_5 = \pi_3 \\ \frac{1}{2}\pi_0 + \pi_3 = \pi_4 \\ \pi_4 + \frac{1}{3}\pi_5 = \pi_5 \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = \left(0, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$$

Exercício 15. Determine a distribuição limite da cadeia de Markov com matriz transição

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < p, q < 1, \quad p + q = 1.$$

Solução: As equações do sistema $\pi = \pi P$ são

$$\begin{cases} q(\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3) + \pi_4 = \pi_0 \\ p\pi_0 = \pi_1 \\ p\pi_1 = \pi_2 \\ p\pi_2 = \pi_3 \\ p\pi_3 = \pi_4 \end{cases}$$

Como $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 - \pi_4$ temos da primeira equação do sistema que

$$q(1 - \pi_4) + \pi_4 = \pi_0$$

Por outro lado, $\pi_4 = p\pi_3 = p^2\pi_2 = p^3\pi_1 = p^4\pi_0$. Logo,

$$q(1 - p^4\pi_0) + p^4\pi_0 = \pi_0$$

Assim,

$$\pi_0 = \frac{1}{1-(1-q)p^4}$$

e

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \frac{1}{1-(1-q)p^4}(1, p, p^2, p^3, p^4).$$

Exercício 16. Considere a cadeia de Markov com estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz transição,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Determine:

(1) A distribuição limite da cadeia de Markov.
(2) Calcule $E(T_0|X_0 = 1)$. (Dica: observe que a cadeia passa sempre do estado 0 para o estado 1)

Solução:

(1) Como $0 \to 1 \to 3 \to 2 \to 0$, todos os estados comunicam entre si. Logo a cadeia é irredutível. Por outro lado, $P_{1,1} > 0$, portanto o estado 1 é aperiódico. Logo a cadeia é aperiódica. Portanto, a cadeia tem uma única distribuição estacionária que é igual à distribuição limite. Vamos então calcular a distribuição estacionária. Resolvendo o sistema $\pi = \pi P$ obtemos

$$\pi = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

(2) Como a cadeia passa sempre do estado 0 para o estado 1,

$$E(T_0|X_0 = 0) = 1 + E(T_0|X_0 = 1).$$

Da alínea anterior deduzimos que $E(T_0|X_0 = 0) = 6$. Logo,

$$E(T_0|X_0 = 1) = 5.$$

Exercício 17. Considere uma cadeia de Markov com estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine os tempos médios de absorção no estado 3.

Solução: Os tempos médios de absorção no estado 3 satisfazem

$$\begin{cases} t_0 = 1 + \frac{1}{3}t_0 + \frac{1}{6}t_1 + \frac{1}{6}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \\ t_1 = 1 + \frac{1}{5}t_1 + \frac{2}{5}t_2 + \frac{2}{5}t_3 \\ t_2 = 1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3 \\ t_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo

$$(t_0, t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{41}{16}, \frac{9}{4}, 2, 0\right)$$

Exercício 18. Considere uma cadeia de Markov com estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Partindo do estado 1, determine a probabilidade da cadeia ser absorvida pelo estado 0.
(2) Determine o tempo médio de absorção em $A = \{0, 3\}$.

Solução:

(1) As probabilidades de absorção no estado 0 satisfazem

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_1 = \frac{1}{3}h_0 + \frac{1}{6}h_1 + \frac{1}{6}h_2 + \frac{1}{3}h_3 \\ h_2 = \frac{1}{4}h_0 + \frac{1}{8}h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{8}h_3 \\ h_3 = 0 \end{cases}$$

que tem solução,

$$(h_0, h_1, h_2, h_3) = \left(1, \frac{10}{19}, \frac{12}{19}, 0\right)$$

Logo, partindo do estado 1, a probabilidade da cadeia ser absorvida pelo estado 0 é 10/19.

(2) Os tempos médios de absorção em $\{0, 3\}$ satisfazem

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 1 + \frac{1}{3}t_0 + \frac{1}{6}t_1 + \frac{1}{6}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \\ t_2 = 1 + \frac{1}{4}t_0 + \frac{1}{8}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{8}t_3 \\ t_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo

$$(t_0, t_1, t_2, t_3) = \left(0, \frac{32}{19}, \frac{46}{19}, 0\right)$$

Exercício 19. Considere o seguinte jogo. Uma moeda perfeita é lançada sucessivamente ao ar até que apareçam duas caras sucessivas.

(1) Modele o jogo usando uma cadeia de Markov. Determine a matriz de transição e o diagrama da cadeia. (Dica: $S = \{0, 1, 2\}$)
(2) Determine a decomposição do espaço dos estados da cadeia.
(3) Calcule o tempo médio de duração do jogo supondo que começa o jogo com duas coroas.

Solução:

(1) Denotemos por 0 coroa e 1 cara. Escrevemos o resultado de um número de lançamentos como uma palavra ω de 0's e 1's. Seja $\omega\mathbf{0}$ uma palavra com um zero no fim. Então $\omega0\mathbf{1}$ com probabilidade $1/2$ ou $\omega0\mathbf{0}$ com probabilidade $1/2$. Seja agora $\omega\mathbf{1}$ uma palavra com um 1 no fim. Então $\omega1\mathbf{0}$ com probabilidade $1/2$ ou $\omega1\mathbf{1}$ também com probabilidade $1/2$. Seja $S = \{0, 1, 2\}$. Modelando o jogo usando uma cadeia de Markov obtém-se a matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $S = \{0, 1\} \cup \{2\}$ onde $\{0, 1\}$ são estados transitivos e $\{2\}$ é recorrente (de facto absorvente).
(3) Quer-se calcular o tempo médio de absorção em $\{2\}$ partindo do estado 0. Os tempos médios satisfazem

$$\begin{cases} t_0 = 1 + \frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_1 \\ t_1 = 1 + \frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_2 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo

$$(t_0, t_1, t_2) = (6, 4, 0)$$

Portanto, o tempo médio de duração do jogo supondo que começa o jogo com duas coroas é 6 lançamentos.

Exercício 20. Um autocarro chega a uma determinada paragem de autocarros de 10 em 10 minutos com uma distribuição de Poisson. Qual é a probabilidade de o intervalo entre chegadas sucessivas ser superior a 20 minutos? Quanto tempo tem um passageiro de esperar para apanhar um autocarro com probabilidade de 0.5?

Solução: Seja $N(t)$ o número de autocarros que passaram até ao instante t (horas). Suponhamos que $N(t)$ é um processo de Poisson com taxa 6. A probabilidade de o intervalo entre chegadas sucessivas ser superior a 20 minutos é

$$\mathbb{P}(T > 1/3) = e^{-6*(1/3)} = e^{-2}.$$

Para calcular o tempo que um passageiro tem de esperar para apanhar um autocarro com probabilidade de 0.5 resolvemos a equação

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-6t} = 0.5$$

que tem solução $t = \frac{1}{6}\log 2$

Exercício 21. Seja T uma variável aleatória com distribuição de probabilidade contínua. Mostre que T tem distribuição exponencial se e só se T não tem memória, isto é,

$$\mathbb{P}(T > x + y | T > x) = \mathbb{P}(T > y).$$

Solução: Seja $g(x) = \mathbb{P}(T > x)$. Então

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \mathbb{P}(T > x + y) \\ &= \mathbb{P}(T > x)\frac{\mathbb{P}(T > x + y, T > x)}{\mathbb{P}(T > x)} \\ &= \mathbb{P}(T > x)\mathbb{P}(T > x + y | T > x) \\ &= g(x)g(y) \end{aligned}$$

Portanto, a função $g(x)$ é multiplicativa. Logo $\log(g(x))$ é aditiva. Segue do lemma de Cauchy que uma função aditiva contínua é da forma

$$\log(g(x)) = -\lambda x, \quad \lambda > 0.$$

Assim, $g(x) = e^{-\lambda x}$.

Exercício 22. A chegada de passageiros a uma paragem de autocarro segue um processo de Poisson com intensidade λ_1. Seja T o tempo de chegada de um autocarro que é independente do processo de Poisson. Quando $t = 0$ não existem passageiros na paragem. Supondo que T segue uma distribuição exponencial com intensidade λ_2, calcule o número médio de pessoas na paragem no instante T.

Solução: Quer-se calcular $E(N(T))$. Usando a lei de probabilidade total para a esperança condicional,

$$\begin{aligned} E(N(T)) &= \int_0^\infty E(N(T)|T = t) f_T(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty E(N(t)|T = t)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\ &= \int_0^\infty E(N(t))\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\ &= \int_0^\infty (\lambda_1 t)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{aligned}$$

Exercício 23. Suponha que N_1 e N_2 são processos de Poisson independentes com intensidades λ_1 e λ_2, respectivamente. Mostre que $N_1 + N_2$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda_1 + \lambda_2$.

Solução: Seja $X(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Vamos verificar que $X(t)$ satisfaz os axiomas do processo de Poisson:

(1) $X(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0$
(2) $X(t+s) - X(s) = N_1(t+s) - N_1(s) + N_2(t+s) - N_2(s)$. Como a soma de variáveis aleatórias de Poisson independentes é também Poisson, temos que o incremento $X(t+s) - X(s)$ segue distribuição de Poisson com taxa $\lambda_1 t + \lambda_2 t$.
(3) $X(t)$ tem incrementos independentes porque N_1 e N_2 sao independentes processos de Poisson.

Exercício 24. Seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com estados $\{0,1\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

Considere um processo de Poisson $N(t)$ com parâmetro $\lambda > 0$. Mostre que

$$X(t) = Y_{N(t)}$$

é um processo de nascimento e morte com dois estados $\{0,1\}$. Determine os parâmetros do processo λ_0 e μ_1 em função de α e λ.

Solução: A propriedade de Markov segue do facto de Y_n ser uma cadeia de Markov. Vamos calcular as intensidades que caracterizam o processo.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X(t+s) = 1 | X(s) = 0) &= \mathbb{P}(X(t) = 1 | X(0) = 0) \\
&= \mathbb{P}(Y_{N(t)} = 1 | Y_{N(0)} = 0) \\
&= P_{0,1}^{(N(t))} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_{0,1}^{(i)} \mathbb{P}(N(t) = i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_{0,1}^{(i)} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_{0,1}^{(i)} (1 - \lambda t + o(t)) \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= P_{0,1}(1 - \lambda t + o(t)) \lambda t + o(t) \\
&= P_{0,1} \lambda t + o(t) \\
&= \lambda t + o(t)
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda_0 = q_{0,1} = \lambda$. De forma equivalente calcula-se

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t+s)=0|X(s)=1) &= P_{1,0}(1-\lambda t + o(t))\lambda t + o(t)\\ &= P_{1,0}\lambda t + o(t)\\ &= (1-\alpha)\lambda t + o(t)\end{aligned}$$

Logo, $\mu_1 = q_{1,0} = (1-\alpha)\lambda$. Portanto,

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ (1-\alpha)\lambda & -(1-\alpha)\lambda \end{pmatrix}$$

Exercício 25. Considere um processo $X(t)$ de nascimento (sem morte) com parâmetros $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. Supondo que $X(0) = 0$, determine $\mathbb{P}(X(t) = j)$ para $j = 0, 1, 2$.

Solução: Seja $\pi_j(t) = \mathbb{P}(X(t) = j)$ e considere-se o vector $\pi(t) = (\pi_j(t))$. Entao

$$\pi(t) = \pi(0)P(t)$$

onde $P(t) = (P_{i,j}(t))_{i,j}$ é a matriz de probabilidades de transição e $\pi(0) = (1, 0, \ldots)$ uma vez que $X(0) = 0$. Assim,

$$\pi_j(t) = P_{0,j}(t), \quad j \geq 0.$$

Portanto, vamos calcular as probabilidades de transição $P_{0,j}(t)$ para $j = 0, 1, 2$. Usando as equações progressivas de Kolmogorov temos que

$$\begin{aligned} p'_{0,0}(t) &= -\lambda_0 p_{0,0}(t)\\ p'_{0,1}(t) &= \lambda_0 p_{0,0}(t) - \lambda_1 p_{0,1}(t)\\ p'_{0,2}(t) &= \lambda_1 p_{0,1}(t) - \lambda_2 p_{0,2}(t)\end{aligned}$$

Da primeira equação obtemos

$$p_{0,0}(t) = e^{-t}$$

Substituindo na segunda e resolvendo,

$$p_{0,1}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)$$

e substituindo na última equação e resolvendo

$$p_{0,2}(t) = \frac{3}{2}e^{-3t}\left(e^{t} - 1\right)^2.$$

Exercício 26. Considere um processo de nascimento e morte com parâmetros $\lambda_n = \lambda$ e $\mu_n = \mu n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Verifique que as probabilidades

$$p_{0,j}(t) = \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda p}}{j!}, \quad \text{onde} \quad p = \frac{1 - e^{-\mu t}}{\mu}$$

satisfazem as equações progressivas de Kolmogorov ($i = 0$).

Solução: Escrever as equações progressivas para $i = 0$,

$$p'_{0,j}(t) = \mu_{j+1} p_{0,j+1}(t) - \lambda_j p_{0,1}(t) + \lambda_{j-1} p_{0,j-1}(t)$$

e verificar que as expressões para $p_{0,j}(t)$ satisfazem a equação.

Exercício 27. Um camião viaja entre Lisboa, Castelo Branco e Porto com a seguinte matriz de intensidades (número de viagens por mês)

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Determine:

(1) A fracção de tempo (a longo prazo) que o camião permanece em cada cidade.
(2) O número médio de viagens por ano de Castelo Branco para Lisboa.

Solução:

(1) Resolvendo o sistema $\pi Q = 0$ vem que
$$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$
Logo, o camião permanece metade do seu tempo em Lisboa e $1/4$ do tempo em Castelo Branco e Porto.
(2) Em média, o camião permanece $1/4$ (3 meses) do tempo em Castelo Branco e viaja para Lisboa 3 vezes por mês. Assim, o número médio de viagens por ano de Castelo Branco para Lisboa é 9.

Exercício 28. Seja $X(t)$ um processo de nascimento e morte com estados $\{0, 1, \ldots, N\}$ e parâmetros $\lambda_n = \alpha(N - n)$ e $\mu_n = \beta n$ onde $\alpha, \beta > 0$. Determine a distribuição estacionária.

Solução: Resolver o sistema $\pi Q = 0$ que tem solução
$$\pi_k = C_k^N p^k (1-p)^{N-k}, \quad p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$